Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
27 ottobre 2017

1. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, -12, -6, -12)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12, \quad \mathbf{x} = (1, 0, -7, -6)^T.$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \gamma & 0 \\ \gamma & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale γ A è invertibile, e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\gamma = 2$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0)^T$.

Soluzione. Invertibile $\forall \gamma \neq \pm 2\sqrt{6}$, Jacobi converge per $-2\sqrt{6} < \gamma < 2\sqrt{6}$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (-1/5, -1/5, -1/5)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (7/25, 8/25, 1/25)^T$.

3. Determinare i valori dei parametri α e β per i quali il metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h\left[\alpha f(x_i, \eta_i) + 2f(x_i + \beta h, \eta_i + \beta h f(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

risulta convergente e quelli per cui esso assume ordine massimo.

Soluzione. Consistente per $\alpha = -1$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$; second'ordine per $\alpha = -1$ e $\beta = 1/4$.

4. Risolvere, facendo ricorso alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y'' - 4y = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right), \qquad x \in [-2,\, 2]$$

Soluzione

$$S_y(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{16\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-24\sqrt{3}(-1)^k}{(16+3k^2\pi^2)(4-9k^2)\pi}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+2k+8}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{e^{-2ix}}{2x^2+1}\right\}.$$

Soluzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{7}}{14}e^{-ix-\sqrt{7}|x|}, \qquad F(k) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|k-2|}.$$