

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

12 giugno 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [-4, -4, -8, -5]^T$.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.

3. Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10], \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = 3/2$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = 1/2$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$2y'' + y = 2x + 1.$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2ik}}{k^2 + ik + 2} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{x e^{-2ix}}{x^2 + 9} \right\}.$$