Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

13 luglio 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1,\, 2,\, 3]^T$.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = -4, \quad \mathbf{x} = [-3,\, 5,\, 0]\,.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$. È possibile dire qual'è la soluzione del sistema senza fare ulteriori calcoli?

   Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq 0, 2$. Il metodo di Jacobi converge se $-2 < \alpha < 2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1/2, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1/2, 0]^T$. Poiché il metodo è consistente, la soluzione è $\mathbf{x} = [1, 1/2, 0]^T$.

3. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

   (a) $\eta_{k+1} = \eta_k + 2\alpha h \left[3f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$

   (b) $\eta_{k+1} = \frac{2\gamma+1}{2}\eta_k - \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1}).$

   Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

   Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 1/8$ e $\beta = 1$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $-2 \leq \gamma \leq 1$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$
$$2y'' + y = |x|.$$
Soluzione.
$$y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^2\pi^2(1 - 2k^2\pi^2)} \cos(k\pi x).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$
$$2y'' - y = H(x + 3) - H(x - 4).$$
Soluzione.
$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)} - \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)}\right), & x \leq -3, \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)} + \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)} - 2\right), & -3 < x \leq 4, \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+3)} + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)}\right), & x > 4. \end{cases}$$