Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

19 settembre 2018

1. Si calcoli la fattorizzatione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la seconda colonna della sua inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -5, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica, motivando opportunamente la risposta, se la matrice dei coefficienti possiede una specifica struttura e per quali valori di α la matrice dei coefficienti è singolare. Si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è simmetrica qualunque sia il valore di α ed è singolare se $\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Il metodo di Jacobi converge se $-\sqrt{\frac{8}{3}} < \alpha < \sqrt{\frac{8}{3}}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/3, -2/3, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5/9, -2/9, 4/3]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x} - 1, \quad x \in [\frac{1}{2},\, 3] \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}, y'(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (5/6, 3/2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (19/12, 7/4)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x, & -1/2 \le x < 0, \\ -2 + x, & 0 \le x < 1/2, \\ f(x+1), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = -\frac{7}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1)\,\cos(2k\pi x).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 8x}{x^2+3}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k}}{5+\mathrm{i}(6-2k)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{2i\sqrt{3}}\left(e^{-\sqrt{3}|k-8|} - e^{-\sqrt{3}|k+8|}\right), \qquad f(x) = \frac{1}{2}e^{(3i+\frac{5}{2})(x-3)}H(3-x).$$