

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

29 marzo 2019

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice  $A$  e la si utilizzi per calcolare la soluzione del sistema  $Ax = b$  e il determinante di  $A$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -5/26 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 26/3 & 1 \\ 0 & 0 & 26/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 31/13 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = 124, \quad x = [1, 0, 1, 0]^T$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determinare i valori di  $\alpha$  per i quali  $A$  è invertibile, i valori di  $\alpha$  per i quali  $A$  è definita positiva e i valori di  $\alpha$  per i quali il metodo di Gauss-Seidel è convergente se applicato al sistema  $Ax = b$ . Posto  $\alpha = 1$ , calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel considerando il vettore iniziale  $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$ .

*Soluzione.* La matrice  $A$  è invertibile se  $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$ , è definita positiva se  $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$  e il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni valore di  $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$ . Se  $\alpha = 1$  le iterazioni richieste sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2, 1/4, 7/8]^T, \mathbf{x}^{(2)} = [7/8, -3/8, 19/16]^T$ .

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y & x \in [-2, 2] \\ y(-1) = \frac{1}{2}, y'(-1) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in  $x = 0$  mediante il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{2}$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -1/4)^T, \boldsymbol{\eta}_2 = (7/8, -27/16)^T$ .

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+1), & x \in [-3, -2), \\ 0, & x \in [-2, 3], \end{cases}.$$

*Soluzione* La serie di Fourier è la seguente

$$S_f(x) = -\frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{3}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{3} + \frac{9}{k^2\pi^2} \left( \cos \frac{2k\pi}{3} - (-1)^k \right) \right] \cos \left( \frac{k\pi}{3} x \right) \\ + \left[ \frac{3}{k\pi} \left( \cos \frac{2k\pi}{3} - 2(-1)^k \right) - \frac{9}{k^2\pi^2} \sin \frac{2k\pi}{3} \right] \sin \left( \frac{k\pi}{3} x \right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \{ 2xe^{-x} H(x-2) \}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{5ik} \sin 3(k+1)}{(k+1)} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \frac{2e^{-2(1+ik)}(3+2ik)}{(1+ik)^2}, \\ f(x) = \frac{1}{2} e^{-i(x+5)} [H(x+8) - H(x+2)].$$