Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

18 settembre 2019

1. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1,\, 0,\, 1,\, 1]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -8, \qquad x = [0,\, 1/4,\, 1/2,\, 1/4].$$

2. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$. Si calcolino, inoltre, le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, considerando come vettore iniziale $x^{(0)} = [1,\, 0,\, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile essendo $\det(A) = -85 \neq 0$ e il metodo di Gauss-Seidel è convergente poichè $\rho(H_J) = \frac{5}{12} < 1$. Le iterate richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3/4, -7/4, -2/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [91/48, -59/24, -1/24]^T$.

3. Discutere la convergenza della seguente formula alle differenze finite al variare dei parametri reali α e β

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left[\alpha f(x_i, \eta_i) + f(x_i + \frac{\beta}{3}h, \eta_i + \frac{\beta}{3}hf(x_i, \eta_i))\right], \\ \eta_0 = y_0. \end{cases}$$

Dire inoltre se la seguente formula multistep è stabile

$$\eta_i = -\eta_{i-2} + 4hf(x_{i-1}, \eta_{i-1}).$$

Soluzione. La formula monostep è stabile per ogni valore dei parametri reali α e β. E' convergente del primo ordine $\forall \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha = 3$. E' convergente del secondo ordine se $\alpha = 3$ e $\beta = 6$. La formula multistep è stabile.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$
$$y'' - 5y = x^2 - 1.$$

Soluzione. La serie di Fourier del termine noto è
$$S_f(x) = \left(\frac{\pi^2}{12} - 1\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(2kx)$$

La serie di Fourier cercata è
$$S_y(x) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(5+4k^2)} \cos(2kx)$$

5. Eseguire i seguenti calcoli
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k}}{6 - 5\mathrm{i}k - k^2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{x}{1 + \mathrm{i}x}\right\}.$$

Soluzione.
$$f(x) = \mathrm{e}^{3x+8}(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{4})H(-x-4),$$
$$F(k) = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{k}H(-k).$$