Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

5 novembre 2019

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_3$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Si calcoli la matrice $A = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2^T$ e si dica quanto vale il suo determinante.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$,

$$\|\mathbf{v}_3\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{v}_3\|_1 = 6, \quad \|\mathbf{v}_3\|_2 = \sqrt{10}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di A è nullo perché la matrice ha rango 1.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2\beta & -1 & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ \beta & -1 & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (2, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})^T$.

Soluzione. La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/3$; B è l'inversa di A per $\beta = 1$; $\sigma(A) = \{1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$, $\rho(A) = 2 + \sqrt{3}$, $\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2 - \sqrt{3})$, $\rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2 + \sqrt{3})^3$; $\mathbf{y} = (2 + \mathrm{i}, 3 + 4\mathrm{i}, 1 + 2\mathrm{i})^T$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 5$.

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 \le x < -1/2, \\ \cos(\pi x) + 1 & -1/2 \le x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \le x \le \pi/2, \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione data è differenziabile termine a termine e la sua serie di Fourier è

$$S_f(x) = \left(\frac{2}{\pi^2} + 1\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(k)}{\pi^2 - 4k^2} \cos(2kx).$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 5y = f(x), \qquad y' + 5y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

essendo $f(x)$ la funzione dell'esercizio precedente.

Soluzione. La soluzione della prima equazione differenziale è

$$S_y(x) = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(k)}{(\pi^2 - 4k^2)(5 - 4k^2)} \cos(2kx).$$

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$S_y(x) = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(k)}{(\pi^2 - 4k^2)(25 + 4k^2)} \left(5\cos(2kx) + 2k\sin(2kx)\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\cos(7x)}{5 + \mathrm{i}(x+1)}\right\}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k+3)\mathrm{e}^{5\mathrm{i}k}}{k^2 + 6k + 12}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \pi\left[\mathrm{e}^{(5+\mathrm{i})(k-7)} H(7-k) + \mathrm{e}^{(5+\mathrm{i})(k+7)} H(-7-k)\right],$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}(x+5)}}{2}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{3}(x+5)} H(-x-5) - \mathrm{e}^{-\sqrt{3}(x+5)} H(x+5)\right].$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

5 novembre 2019

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_3$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Si calcoli la matrice $A = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2^T$ e si dica quanto vale il suo determinante.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$,

$$\|\mathbf{v}_3\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_3\|_1 = 4, \quad \|\mathbf{v}_3\|_2 = 2.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di A è nullo perché la matrice ha rango 1.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3\beta & -1/2 & \beta \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ \beta & -1/2 & 3\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (2, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i})^T$.

Soluzione. La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}/2$; B è l'inversa di A per $\beta = 1/4$; $\sigma(A) = \{2, 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$, $\rho(A) = 2+\sqrt{2}$, $\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2-\sqrt{2})$, $\rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2+\sqrt{2})^3$; $\mathbf{y} = (4+\mathrm{i}, 3+3\mathrm{i}, 2+3\mathrm{i})^T$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = \sqrt{18}$.

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & -\pi/2 \le x < -1/2, \\ \sin(\pi x) & -1/2 \le x < 1/2, \\ 1/2, & 1/2 \le x \le \pi/2, \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione data non è differenziabile termine a termine e la sua serie di Fourier risulta essere

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos(k) \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \right) \sin(2kx).$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 5y = f(x), \qquad y' + 5y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

essendo $f(x)$ la funzione dell'esercizio precedente.

Soluzione. La soluzione della prima equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(5 - 4k^2)} \left(\cos(k) \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \right) \sin(2kx).$$

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(25 + 4k^2)} \left(\cos(k) \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \right) (-2k\cos(2kx) + 5\sin(2kx)).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\sin(3x)}{\pi + \mathrm{i}(x+4)} \right\}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\mathrm{i}(k+2)\mathrm{e}^{3ik}}{k^2 + 4k + 12} \right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{\mathrm{i}} \left[\mathrm{e}^{(\pi+4i)(k-3)} H(3-k) - \mathrm{e}^{(\pi+4i)(k+3)} H(-3-k) \right],$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2i(x+3)}}{2} \left[\mathrm{e}^{\sqrt{8}(x+3)} H(-x-3) - \mathrm{e}^{-\sqrt{8}(x+3)} H(x+3) \right].$$