Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

28 gennaio 2020

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e si dica se il vettore $\mathbf{v}_3$ è normalizzato rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_3$ è normalizzato rispetto alla norme ∞. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & -\beta \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e si determinino i valori di α e β per cui Q è una matrice ortogonale e per cui le matrici R e M sono una l'inversa dell'altra. Assegnati ad α e β uno di questi valori, si calcolino $\kappa_2(Q)$ e $\kappa_\infty(R)$, essendo $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Si risolva infine il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = QR$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione La matrice Q è ortogonale per $\alpha = \pm\sqrt{2}/2$, M è l'inversa di R per $\beta = -1$, $\kappa_2(Q) = 1$, $\kappa_\infty(R) = 24$, $\mathbf{x} = M(Q^T\mathbf{b}) = (\sqrt{2}+1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$.

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \le x < 0, \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione data non è differenziabile termine a termine essendo discontinua in $x = 0$. La sua serie di Fourier è

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\right) \sin(2kx).$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

$$y'' + \sqrt{2}y' + y = f(x), \qquad \sqrt{2}y'' + y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

essendo $f(x)$ la funzione dell'esercizio precedente.

Soluzione. La soluzione della prima equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k}{k(1+16k^4)} \cos(2kx) + \frac{4k^2-1}{k(1+16k^4)} \sin(2kx).$$

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4\sqrt{2}k^2-1)} \sin(2kx).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{x^2+5}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin 3(k-1)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}(k-1)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{5}k}H(-k) - \mathrm{e}^{-\sqrt{5}k}H(k)\right],$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[H(x+2) - H(x-4)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-1)}.$$