

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

9 gennaio 2020

1. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e l'unica soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 1, 0]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/9 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -3/28 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 28/9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 12, \quad \mathbf{x} = [1, -1/6, -2, 11/6]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è definita positiva e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

Soluzione. La matrice A è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ oppure se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Jacobi converge perché la matrice A risulta essere diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/12, 17/12, -1/9]^T$.

3. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

$$(a) \quad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{\beta} h [3f(x_k, \eta_k) + 4f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))],$$

$$(b) \quad \eta_{k+1} = -\delta \eta_k + (1 - \delta) \eta_{k-1} + 2h f(x_k, \eta_k).$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile per $0 \leq \delta < 2$. Lo schema (a) ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = \frac{1}{8}$ e $\beta = \frac{7}{8}$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = 2 + |x|, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$f(x) = \frac{9}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos 2k\pi x$$

La funzione f è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$3y'' - y = H(x + 3) - H(x + 1),$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[e^{\sqrt{3}/3(x+1)} - e^{\sqrt{3}/3(x+3)} \right], & x < -3, \\ \frac{1}{2} \left[e^{-\sqrt{3}/3(x+3)} + e^{\sqrt{3}/3(x+1)} - 2 \right] & -3 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2} \left[e^{-\sqrt{3}/3(x+3)} - e^{-\sqrt{3}/3(x+1)} \right], & x \geq -1. \end{cases}$$