Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

1 febbraio 2021

L'esame è stato svolto sia a distanza che in presenza.

Gli esercizi assegnati agli studenti sono stati estratti dai seguenti testi.

1. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

   Si dica per quali valori di a la matrice è invertibile e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si dimostri che B è l'inversa di A e si calcoli al variare del parametro a l'indice di condizionamento di A con indice 1, ∞ e 2.

   Soluzione. A è non singolare per $a \neq 0$ e ha autovalori positivi se $a > 0$. $k(A)_1 = k(A)_\infty = 3$, $k(A)_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

2. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   e calcolare, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A, la seconda colonna dell'inversa di A, e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1,\, 0,\, 2)^T$.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -15$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_2 = (1/3, 0, 0)^T \quad \mathbf{x} = (-1/3, -1, 1)^T.$$

3. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1/2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Si dica per quali valori di α la matrice A risulta definita positiva e per quali il metodo iterativo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$\mathbf{b} = (1,0,1)^T$. Fissato $\alpha = 1/2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,0,0)^T$.

Soluzione. La matrice A è definita positiva per $-1 < \alpha < 1$ e il metodo di Jacobi converge per gli stessi valori di α. Se $\alpha = 1/2$ le iterazioni del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1,0,1/2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3/4,0,5/8)^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{x-y'}{y}, & x \in [1,4] \\ y(1) = 1, y'(1) = 2, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{11}{4}, \frac{3}{2})^T$.

5. Dire per quali valori dei parametri α, β reali positivi il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(2 - \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3}\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{3} f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))\right].$$

Fissati tali valori, applicare tale schema per approssimare la soluzione del seguente problema di Cauchy nel punto $x = 1/2$ con $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = x, & x \in [0,4] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Il metodo è convergente del secondo ordine se $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = -3$. $\eta_1 = \frac{1}{8}$.

6. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1,1]$ e dire se la serie di Fourier di $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' - 3y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \in [-1,0), \\ 1 - x, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Soluzione. La serie del termine noto è

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi x)$$

e questa non è differenziabile termine a termine. La serie della soluzione dell'equazione differenziale è

$$S_y(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi(3 + k^2\pi^2)}\right) \sin(k\pi x).$$

7. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2,2]$ e dire se la serie di Fourier di $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' - 2y = 5x.$$

Soluzione. La serie del termine noto è

$$S_f(x) = 20 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

e questa non è differenziabile termine a termine. La serie della soluzione dell'equazione differenziale è

$$S_y(x) = 80 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(k\pi)(8+k^2\pi^2)}\right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

8. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(3x-2)}{3x-2}\right\}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2+\mathrm{i}k}{10+2k^2}\right\}.$$

$$\mathcal{F}\left\{(5x+2)e^{-3x}H(x)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i(k-2)}{e^{ik}(9+(k-2)^2)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{3}e^{-\frac{2}{3}\mathrm{i}k}[H(3-k) - H(-k-3)],$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{5}}e^{-\sqrt{5}|x|} - \frac{1}{4}[e^{-\sqrt{5}x}H(x) - e^{\sqrt{5}x}H(-x)]$$

$$F(k) = \frac{11+2ik}{(3+ik)^2}$$

$$f(x) = -\frac{e^{2i(x-1)}}{2}[e^{-3(x-1)}H(x-1) - e^{3(x-1)}H(1-x)]$$

9. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' + 2y = H(x+4) - H(x-2), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2(x+4)}), & -4 < x \le 2 \\ \frac{e^{-2x}}{2}(e^4 - e^{-8}), & x > 2 \end{cases}$$

10. Eseguire il seguente calcolo, dove $*$ indica l'operatore di convoluzione e H indica la funzione di Heaviside

$$[e^{-5x}H(x)] * [H(x-1) - H(x-4)]$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{5}(1 - e^{-5(x-1)}), & 1 < x \leq 4 \\ \dfrac{e^{-5x}}{5}(e^{20} - e^{5}), & x \geq 4 \end{cases}$$