Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

1 luglio 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_4 & = 1 \\ 3x_3 - 2x_4 & = -2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = 3 \end{cases}$$

   Lo si risolva mediante la fattorizzazione PA=LU e si calcoli il suo determinante e la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -10, \quad A\mathbf{e}_2 = (0, 2/5, 1/5, -1/5)^T, \quad \mathbf{x} = (2, 1, 0, 1)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 4\gamma & 2\gamma & \gamma \\ 2\gamma & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori di γ la matrice A è invertibile. Si studi al variare di γ la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 0\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, 4/5$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $-4/5 < \gamma < 4/5$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1/4, -2, 0)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (5/4, -1/2, 3/4)^T$.

3. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{3} \left[f(x_i, \eta_i) + \alpha f(x_i + \beta h, \eta_i + \beta h f(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

   e dire per quali valori dei parametri α e β è convergente e per quali è del second'ordine.

   Soluzione. La formula è monostep, esplicita, a due stadi. È consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 2$ e per ogni β, è del second'ordine per $\alpha = 2$ e $\beta = \frac{3}{4}$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < -1, \\ 1+x & -1 \leq x < 0, \\ 1-x & 0 \leq x < 1, \\ 0 & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione f è differenziabile termine a termine e la serie di Fourier é

$$S_f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' + 3y = H(x-4) - H(x-5), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = -\frac{1}{7} \begin{cases} 0, & x < 4, \\ \frac{1}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-3(x-4)}\right), & 4 \leq x < 5, \\ \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{15} - \mathrm{e}^{12}\right)\mathrm{e}^{-3x}, & x \geq 5. \end{cases}$$