Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

15 settembre 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_4 & = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & = 1 \\ x_2 - x_3 + 6x_4 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 & = 1 \end{cases}$$

   Lo si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ e si calcoli il suo determinante.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & +1/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 17/3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -84, \quad \mathbf{x} = (1, 0, -1, 0)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori di α la matrice A è invertibile. Si studi al variare di α la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 0\ 1]^T$. È possibile dire qualcosa sulla convergenza del metodo di Gauss–Seidel quando $\alpha = 5$, senza analizzare il raggio spettrale della matrice di iterazione?

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, 2/3$. Il metodo di Jacobi converge per $\alpha > 2/3$ oppure $\alpha < -2/3$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (0, -1, 1/3)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (2/3, 1/3, 2/3)^T$. Il metodo di Gauss–Seidel converge per $\alpha = 5$ perché la matrice A risulta in questo caso strettamente diagonalmente dominante.

3. Stabilire per quali valori di α e β lo schema seguente risulta consistente del primo ordine, per quali è del second'ordine e per quali è stabile

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \alpha \frac{h}{2} \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{\beta}{2} h, \eta_k + \frac{\beta}{2} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Soluzione. Il metodo essendo monostep è stabile per tutti i valori dei parametri, è consistente del primo ordine per $\alpha = 1$ e per ogni β, risulta del second'ordine per $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0, \\ 1 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie di Fourier è

$$S_f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2} \cos(k\pi x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi x).$$

Essa non è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' + 5y = H(x+3) - H(x-4), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \dfrac{1}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5(x+3)}), & -3 < x \leq 4, \\ \dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{-5(x-4)} - \mathrm{e}^{-5(x+3)}), & x > 4. \end{cases}$$