**Nome e matricola:** ..........................................................................

**Corso di studi:** ..........................................................................

**Prova scritta di Matematica Applicata**

10 novembre 2022

1. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
ed utilizzarla per calcolarne il determinante e per risolvere il sistema linare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, 6, 5, -18)^T$.

   *Soluzione.*
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = -626, \quad \mathbf{x} = (1, 2, -3, 04)^T.$$

2. Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $s \in \mathbb{R}$, con
$$A = \begin{bmatrix} 4 & s & 0 \\ s & 2 & s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$
dire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali valori il metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema risulta convergente. Fissato $s = \frac{1}{2}$, calcolare le prime due iterazioni del metodo, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

   *Soluzione.* La matrice dei coefficienti è non singolare se $s \neq \pm\sqrt{\frac{8}{5}}$. Il metodo di Jacobi converge per $-\sqrt{\frac{8}{5}} < s < \sqrt{\frac{8}{5}}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (3/4, 7/2, 4)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (5/16, 37/16, 9/4)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine
$$\begin{cases} y''(x) = \sqrt{3}\, y'(x) - y(x) \\ y(1) = 1, \ y'(1) = 0 \end{cases}$$
in un sistema del prim'ordine e calcolare i primi due passi $\{\eta_1, \eta_2\}$ del metodo di Eulero utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

   *Soluzione.* $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -1/2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} - 1)^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alle serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 3y = x^2, \qquad x \in [-3, 3].$$

*Soluzione.* La soluzione è

$$y(x) = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{324(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2(27 + k^2\pi^2)} \cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{x\mathrm{e}^{-3x^2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos 3x}{4x^2 + 3}\right\}.$$

*Soluzione.*

$$F_1(k) = -\frac{\sqrt{3\pi}}{18}\mathrm{i}k\,\mathrm{e}^{-k^2/12}, \qquad F_2(k) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{3}/2|k-3|} + \mathrm{e}^{-\sqrt{3}/2|k+3|}\right].$$