Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

11 gennaio 2023

Compito numero 1

1. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

   Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1024, \quad \mathbf{x} = [2, 1, -1, 0]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & 0 \\ 2\beta & 2 & -\beta \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro β la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro β, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\beta = 1/2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\beta \neq \pm\sqrt{2/5}$, definita positiva se $-\sqrt{2/5} < \beta < \sqrt{2/5}$. Il metodo di Jacobi converge per $-\sqrt{2/5} < \beta < \sqrt{2/5}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, -3, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5, -35/8, -3/16]^T$.

3. Identificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 1}\left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{3\alpha}{\beta+1}h, \eta_k + \frac{3\alpha}{\beta+1}hf(x_k, \eta_k)\right)\right],$$

e dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esso è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine.

Soluzione. Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi. Pertanto è stabile per $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq -1$. Esso è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 3$ e $\beta \neq -1$; è di ordine 2 per $\alpha = 3$ e $\beta = 8$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso è stabile quando $-3/2 \leq \gamma \leq 1/2$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 6y(x) = f(x), \qquad x \in [-2, 2]$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+2), & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}(2-x), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dire inoltre se la serie di f è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione non è differenziabile in quanto non è continua in $x = \pm 1$. La serie richiesta è

$$S_y(x) = -\frac{7}{48} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{k^2\pi^2 - 24}\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

dove

$$a_k = -\frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+2(x-2)^2}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-\mathrm{i}k}}{2+i(5k-2)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \sqrt{2}\pi e^{-2\mathrm{i}k - \frac{\sqrt{2}}{2}|k|},$$
$$f(x) = \frac{1}{5}e^{\frac{2(x-1)}{5}(\mathrm{i}-1)}H(x-1).$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

11 gennaio 2023

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\gamma & 1/2 & 0 \\ 0 & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \delta & 0 & \delta \\ 0 & -1 & 0 \\ -\delta & 0 & \delta \end{bmatrix},$$

dove γ e δ sono parametri reali. Determinare in modo efficiente, motivando opportunamente la risposta, il determinante di M e, al variare del parametro γ, il suo raggio spettrale. Stabilire per quali valori di γ la matrice M è l'inversa di L, per quali valori di δ la matrice Q è ortogonale, e assegnare a ciascuno dei due parametri uno dei valori che verificano la proprietà richiesta. Assegnati tali valori, si calcoli l'indice di condizionamento di Q in norma 1, 2 e ∞ e si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $Ax = b$ dove $A = LQ$ e $b = [1, -1, -1]^T$.

Soluzione. La matrice M, essendo triangolare, ha gli autovalori sulla diagonale, quindi $\det(M) = \gamma/2$, $\rho(A) = 1$ se $-1 \leq \gamma \leq 1$ e $\rho(A) = |\gamma|$ se $\gamma < -1$ oppure $\gamma > 1$. La matrice M è l'inversa di L per $\gamma = 1/4$, Q è ortogonale per $\gamma = \sqrt{2}/2$, $\text{cond}_\infty(Q) = \text{cond}_1(Q) = 2$ e $\text{cond}_2(Q) = 1$. La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = Q^T M \mathbf{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T.$$

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1024, \quad \mathbf{x} = [2, 1, -1, 0]^T.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = yy' - x, & x \in \left[\frac{3}{2}, 5\right] \\ y(\frac{3}{2}) = 0, y'(\frac{3}{2}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 5/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{8}, -\frac{11}{16})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 4y(x) = f(x), \qquad x \in [-2, 2]$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+2), & -1 \le x < 0, \\ \frac{1}{2}(2-x), & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Dire inoltre se la serie di f è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione non è differenziabile in quanto non è continua in $x = \pm 1$. La serie richiesta è

$$S_y(x) = -\frac{7}{32} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k^2\pi^2 - 16}\right] \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

dove

$$a_k = -\frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k^2\pi^2}\left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1 + 2(x-2)^2}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-\mathrm{i}k}}{2 + i(5k-2)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \sqrt{2}\pi e^{-2\mathrm{i}k - \frac{\sqrt{2}}{2}|k|},$$
$$f(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{2(x-1)}{5}(\mathrm{i}-1)} H(x-1).$$