Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

25 gennaio 2023

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1/2 & \beta & 0 \\ \beta & -1/2 & \beta \\ 0 & \beta & -1/2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \gamma & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

   dove α, β e γ sono parametri reali. Dire per quali valori di α la matrice A è non singolare e verificare che $\lambda = -2$ è un autovalore di A per ogni valore di α. Si fissi ora $\alpha = -2$. Determinare i valori di β che rendono B l'inversa di A e calcolare il condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di A. Assegnato a γ un valore che renda Q ortogonale, risolvere il sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = QA$ e $\mathbf{b} = (0, -1, 0)^T$.

   Soluzione. La matrice A è non singolare per $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$ e $\lambda = -2$ è autovalore di A in quanto radice del suo polinomio caratteristico. Posto $\alpha = -2$, la matrice B è l'inversa di A per $\beta = -1/2$, $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = 9$ e $\kappa_2(A) = 3 + 2\sqrt{2}$. La matrice Q è ortogonale per $\gamma = \pm 1$ e $\mathbf{x} = B(Q^T\mathbf{b}) = (1/2, 1/2, 1/2)^T$.

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -9. \end{cases}$$

   Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [1, 0, 0, -2]^T.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy - y', & x \in [2,5] \\ y(2) = 2, y'(2) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{15}{4}, \frac{35}{8})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + 2y = \cos(2x), \qquad x \in [-1/4, 1/4]$$

e dire se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1+8k^2\pi^2)(1-4k^2\pi^2)} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cos(4k\pi x).$$

Il termine noto è differenziabile termine a termine.

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}(k-2)}{k^2-4k+9}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x-2)}{(x-1)\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}\right\}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x+1)}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{5}(x+1)}H(x+1) - \mathrm{e}^{\sqrt{5}(x+1)}H(-x-1)\right], \\ F(k) &= \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-3)}\left[H(5-k) - H(1-k)\right]. \end{aligned}$$