Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
28 giugno 2023

Compito numero 1

1. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix},$$

calcolare il determinante di A e dire se la matrice è invertibile. Calcolare il prodotto LL^T e determinare i valori dei parametri a, b e c che rendono M la matrice inversa di L. Sfruttare i calcoli fatti per dedurre l'inversa di A.

Soluzione. $\det(A) = 1$, quindi A è invertibile,

$$LL^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A,$$

$M = L^{-1}$ per $a = -1$, $b = 0$ e $c = -1$. Sostituiti in M questi valori si ha

$$A^{-1} = L^{-T}L^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 4 & 1 \\ 10 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la terza colonna della sua inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/20 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/10 & 7/10 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = [3, -11, 14, -6]^T.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = x^2 y + y', & x \in [0, \infty), \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1, \frac{1}{8})^T$. $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{17}{16}, \frac{11}{16})^T$.

4. Scrivere la serie di Fourier della seguente funzione e stabilire se questa è differenziabile termine a termine

$$f(x) = \cos(4x), \quad x \in [-5, 5].$$

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine ed è data da

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{\sin(20)}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(20 + k\pi)}{20 + k\pi} + \frac{\sin(20 - k\pi)}{20 - k\pi} \right) \cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right) \\ &= \frac{\sin(20)}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{40\sin(20 + k\pi)}{400 - k^2\pi^2} \right) \cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right) \\ &= \frac{\sin(20)}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{40(-1)^k \sin(20)}{400 - k^2\pi^2} \right) \cos\left(k\frac{\pi}{5}x\right). \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $(-\infty, \infty)$

$$y'' - \pi y = H(x - 2) - H(x - 4).$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{cases} e^{\sqrt{\pi}(x-4)} - e^{\sqrt{\pi}(x-2)}, & x \le 2, \\ e^{\sqrt{\pi}(2-x)} - e^{\sqrt{\pi}(x-4)} - 2, & x \in (2, 4], \\ e^{\sqrt{\pi}(2-x)} - e^{\sqrt{\pi}(4-x)}, & x > 4. \end{cases}$$