Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

14 novembre 2023

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 dei vettori assegnati. Si costruisca a partire dai vettori dati, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$. Si consideri la matrice $A = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$. Cosa si può dire a priori sul determinante della matrice A. Motivare opportunamente la risposta.

   Soluzione.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_1\|_\infty &= 1, \quad \|\mathbf{w}_1\|_1 = 2, \quad \|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{2}, \\ \|\mathbf{w}_2\|_\infty &= 2, \quad \|\mathbf{w}_2\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{5}, \\ \|\mathbf{w}_3\|_\infty &= 2, \quad \|\mathbf{w}_3\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

   I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

   Il determinante di A è diverso da zero perché le sue colonne, in quanto ortogonali, sono sono linearmente indipendenti, di conseguenza il rango di A è pari a 3.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha+1 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha-1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   dove β e α sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si fornisca lo spettro e il raggio spettrale di D^{-1} e si calcoli la matrice $E = (D^T)^{-1}$.

Soluzione. La matrice B è l'inversa di A se $\beta = 1/2$; C è non singolare per $\alpha \neq 0, (3 \pm \sqrt{5})/2$; D è ortogonale per $\alpha = -1$, $\sigma(D) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = 1$. Infine, $E = (D^T)^{-1} = D^{-1} = D$, quindi spettro e raggio spettrale di D^{-1} coincidono con quelli di D.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-2y'' + y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & -\frac{\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{3}, \\ -1, & -\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{3}, \\ \cos(x) & \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \frac{3(2-\sqrt{3}) - 2\pi}{3\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+8k^2} \cos(2kx),$$

dove i coefficienti a_k sono dati da

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \sin\left(2k\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2k-1} \left(\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} - \sin(2k-1)\frac{\pi}{3}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2k+1} \left(\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} - \sin(2k+1)\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{4ik}(k-1)}{7+(k-1)^2}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos(x)}{x^2+6x+12}\right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{ie^{i(x+4)}}{2} \left[e^{-\sqrt{7}(x+4)} H(x+4) - e^{\sqrt{7}(x+4)} H(-x-4)\right]$$
$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \left[e^{-\sqrt{3}|k-1|+3i(k-1)} + e^{-\sqrt{3}|k+1|+3i(k+1)}\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y' + \sqrt{5}y = e^{-7(x-2)} H(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{1}{21-\sqrt{5}} \left(e^{-\frac{\sqrt{5}}{3}(x-2)} - e^{-7(x-2)}\right) & x \ge 2. \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

14 novembre 2023

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 dei vettori assegnati. Si costruisca a partire dai vettori dati, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3\}$. Si consideri la matrice $A = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$. Cosa si può dire a priori sul determinante della matrice A. Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione.

$$\|\mathbf{w}_1\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_1\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_1\|_2 = \sqrt{5},$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{w}_2\|_1 = 2, \quad \|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{2},$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_3\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{5}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è diverso da zero perché le sue colonne, in quanto ortogonali, sono sono linearmente indipendenti, di conseguenza il rango di A è pari a 3.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1-\gamma & -\gamma \\ 0 & 1 & \gamma - 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dove δ e γ sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro δ che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro γ che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = 2A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si fornisca lo spettro e il raggio spettrale di D^{-1} e si calcoli la matrice $M = (D^T)^{-1}$.

Soluzione. La matrice B è l'inversa di A se $\delta = 1/2$; C è non singolare per $\gamma \neq 0, (3 \pm \sqrt{5})/2$; D è ortogonale per $\gamma = -1$, $\sigma(D) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = 1$. Infine, $M = (D^T)^{-1} = D^{-1} = D$, quindi spettro e raggio spettrale di D^{-1} coincidono con quelli di D.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-2y' + y = f(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{3}, \\ 0, & -\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ \sin(x) & \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kb_k}{1+16k^2} \cos(2kx) + \frac{b_k}{1+16k^2} \sin(2kx),$$

dove i coefficienti b_k sono dati da

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2k-1} \left(\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} - \sin(2k-1)\frac{\pi}{3} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2k+1} \left(\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} - \sin(2k+1)\frac{\pi}{3} \right) \right].$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k}(k+1)}{5+(k+1)^2} \right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{ \frac{\sin(x)}{x^2+8x+20} \right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-3)}}{2} \left[\mathrm{e}^{-\sqrt{5}(x-3)} H(x-3) - \mathrm{e}^{\sqrt{5}(x-3)} H(3-x) \right]$$
$$F(k) = \frac{\pi}{4\mathrm{i}} \left[\mathrm{e}^{-2|k-1|+4\mathrm{i}(k-1)} - \mathrm{e}^{-2|k+1|+4\mathrm{i}(k+1)} \right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$\sqrt{3}y' - 5y = \mathrm{e}^{2(x-7)} H(7-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-6} \left(\mathrm{e}^{\frac{5\sqrt{3}}{3}(x-7)} - \mathrm{e}^{2(x-7)} \right) & x < 7, \\ 0, & x \geq 7. \end{cases}$$