Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

30 gennaio 2024

Compito numero 1

1. Si consideri la matrice $A = I - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dove $\mathbf{w} = [3, 1, 1]^T$ e $\rho = \frac{2}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}$. Si dica se la matrice A è simmetrica e/o ortogonale. Si calcoli poi il condizionamento in norma 1, 2 e ∞ della matrice e si risolva nel modo più efficiente possibile, motivando la risposta, il sistema $A^3\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Teoricamente cosa si può dire sul determinante di A^2?

   Soluzione. La matrice A é simmetrica e ortogonale essendo pari a

   $$A = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -7 & -6 & -6 \\ -6 & 9 & -2 \\ -6 & -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Inoltre, $\kappa_2(A) = 1$, $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = \frac{361}{121}$, $\mathbf{x} = [-3, -1, -1]^T$ e $\det(A^2) = \det(A^TA) = \det(I) = 1$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

   e la si utilizzi per calcolare la prima e l'ultima colonna della sua inversa e il suo determinante.

   Soluzione.

   $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   $$A\mathbf{e}_1 = [0, -2, 0, 1]^T, \quad A\mathbf{e}_4 = [-1, 0, 1/2, 0]^T, \quad \det(A) = -16,$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e per quali valori la matrice è simmetrica definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $a = 1$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 0, \pm\sqrt{2}/2$, è simmetrica per ogni valore di a, definita positiva se $a > \sqrt{2}/2$. Il metodo di Jacobi converge per $a < -\sqrt{2}/2$ e $a > \sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 0, 1/2, 3/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1/4, 0, 1]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = 3y' - xy \\ y(1/2) = 1, \ y'(1/2) = 0 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -\frac{1}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{8}, -\frac{9}{8})^T$.

5. Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3} \left[5f(x_k, \eta_k) - \alpha f\left(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$$
$$\eta_{k+1} = 2\eta_k - \left(1 - \gamma^2\right) \eta_{k-1} + \frac{h}{3} \left[f(x_k, \eta_k) + 2f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

Soluzione. Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi. Pertanto è stabile per ogni valore di α e β. Esso è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 2$ e per ogni β, è di ordine 2 per $\alpha = 2$ e $\beta = -\frac{3}{8}$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso non è stabile per alcun valore di γ; si noti che per $\gamma = 0$ le due radici del suo polinomio caratteristico sono coincidenti.