

## Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

12 giugno 2013

1. Si determini la fattorizzazione  $PA = LU$  della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e la si usi per risolvere il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [1, 2, 3, 4]^T$  e  $\mathbf{b} = [1, 5, 2, 8]^T$ .

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale  $a$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali valori il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Posto  $a = \frac{1}{2}$ , calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, utilizzando il vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ .

3. Costruire il polinomio di primo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline y_i & 2 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}.$$

Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante e perché.

4. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dire se il problema è ben posto e approssimarne la soluzione nel punto di ascissa  $x = 1$  mediante un metodo alle differenze finite monostep di ordine 2 utilizzando il passo  $h = \frac{1}{2}$ . Qual'è il limite della soluzione numerica per  $x \rightarrow \infty$ ?