

## Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

9 settembre 2013

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione  $PA = LU$ , il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

2. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli, motivando la risposta,  $v = \|\mathbf{c}\|_\infty$ ,  $w = \|\mathbf{b}\|_1$ ,  $z = \|\mathbf{b} + \mathbf{c}\|_2$ . Si dica poi per quali valori del parametro reale  $\alpha$  il metodo di Jacobi applicato al sistema  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  è convergente. Infine, si calcolino le prime due iterazioni del metodo utilizzando il vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (v, w, z)^T$ .

3. Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola i punti di coordinate

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y_i & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}$$

e calcolarlo nel punto di ascissa  $x = 2$ .

4. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} \\ y(1) = 4 \end{cases}, \quad x \in [1, \infty),$$

dire se il problema è ben posto ed approssimarne la soluzione nel punto di ascissa  $x = 3$  mediante una formula alle differenze finite di ordine 2, utilizzando il passo  $h = 1$ .