

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria
25 giugno 2014

1. Risolvere mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ -3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

2. Dopo avere dimostrato che la matrice

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

è unitaria, se ne calcoli il numero di condizionamento rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞ . Si risolva quindi il sistema lineare $V\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 0, -1)^T$, e si calcoli il valore della forma quadratica $\mathbf{b}^T V \mathbf{b}$.

3. Considerato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dire se il metodo di Jacobi risulta convergente e, fissato il vettore iniziale $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$, calcolare le iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.

4. Costruire il polinomio di secondo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{10}{3} \end{array}$$

Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante e perché.