

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

25 settembre 2014

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ dalla matrice dei coefficienti A del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -3 \\ -4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ -4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7 \\ -4x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

e la si utilizzi per determinare $\det(A)$ e la terza colonna di A^{-1} .

2. Dare una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema lineare dipendente dal parametro α

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_3 = 8 \\ x_2 = 4 \\ \alpha x_1 + x_3 = 8 \end{cases}.$$

Posto $\alpha = 1/2$ calcolare le prime due iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ a partire da un vettore iniziale a scelta.

3. Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola i punti di coordinate

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_i & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

e calcolarlo nel punto di ascissa $x = 2$.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2-x}, & x \in [0, 10] \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dire se il problema ammette un'unica soluzione e approssimare la soluzione nel punto di ascissa $x = 1$ con il seguente schema alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{h}{2}f(x_i, \eta_i)) \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

utilizzando il passo $h = 1/2$.