

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

27 febbraio 2015

1. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice $A = MM^T$, essendo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la prima e la terza colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca se A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 1]^T$.

3. Esprimere il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline y_i & 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}$$

nella forma di Lagrange e calcolarne il valore nel punto $x = -1$.

4. Si consideri il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{2}h [f(x_k, \eta_k) + f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k))].$$

Si dica, motivando la risposta, se è un metodo monostep o multistep, esplicito o implicito, si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Infine, posto $h = 1/2$, si applichi tale metodo al seguente problema di Cauchy per approssimare la sua soluzione nel punto $x = 3$

$$\begin{cases} y' = x^2y - x, & x \in [2, 3] \\ y(2) = 1. \end{cases}$$