

## Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

30 aprile 2015

1. Eseguire la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e calcolare, mediante la fattorizzazione trovata, il determinante, e la soluzione del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [1, 1, 1, 1]^T$ .

2. Stabilire per quali valori del parametro reale  $\beta$  il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare

$$\begin{cases} 2\beta x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 12 \\ x_2 + 2\beta x_3 = 20 \end{cases}$$

è convergente. Fissato  $\beta = 1$  e il vettore iniziale  $[1, 0, 1]^T$ , si calcolino le prime due iterazioni del metodo. Dire infine per quali valori di  $\beta$  la matrice è non singolare e per quali è definita positiva.

3. Costruire il polinomio di primo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 4 \\ \hline y_i & 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}.$$

Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante e perché.

4. Sia dato il seguente schema alle differenze finite dipendente dal parametro reale  $\alpha$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3} [f(x_k, \eta_k) + 3f(x_k + 3\alpha h, \eta_k + 3\alpha h f(x_k, \eta_k))].$$

Si dica, motivando la risposta, se è un metodo monostep o multistep, esplicito o implicito, si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza al variare di  $\alpha$ . Infine, posto  $h = 1/2$ , si applichi tale metodo al seguente problema di Cauchy per approssimare la sua soluzione nel punto  $x = 2$

$$\begin{cases} y' = (x+1)y, & x \in [1, 3] \\ y(1) = 1. \end{cases}$$