**Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria**
3 novembre 2015

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
e si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice $A$. La si utilizzi per calcolare il determinante di $A$ e si deduca se $A$ è invertibile. Se lo è, si calcoli, mediante la fattorizzazione PA=LU, la quarta colonna della matrice inversa.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Dire per quali valore del parametro reale $\alpha$ la matrice $A$ è invertibile e per quali il metodo di Gauss-Seidel è convergente. Fissato $\alpha = 3$, si calcolino quindi le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 2, 3]^T$.

3. Costruire il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $2$ | $1$ | $1$ | $2$ |

sia nella base canonica che nella forma di Lagrange. Utilizzare la forma di Lagrange per calcolare il polinomio interpolante nel punto di ascissa 3.

4. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy
$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{\alpha h}{3} \left[ f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \frac{\alpha h}{3}, \eta_i + \frac{\alpha h}{3} f(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$
e studiarne la convergenza e l'ordine al variare del parametro reale $\alpha$.