

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

23 marzo 2016

1. Sia $a = 0.9876 \cdot 10^{-3}$. Calcolare la differenza $c = a - b$ in un sistema in virgola mobile in base 10 e con 4 cifre significative per i seguenti tre valori di b

$$0.1432 \cdot 10^{-5}, \quad 0.9873 \cdot 10^{-3}, \quad -0.1 \cdot 10^{-7}.$$

Si calcoli l'errore relativo rispetto alla soluzione esatta per ciascuno dei tre valori ottenuti e si commentino i risultati.

2. Calcolare il numero di condizione rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞ della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

al variare del parametro reale α .

3. Si consideri la matrice $A = B + B^T$, dove B è la matrice dell'esercizio precedente. Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [0, 1, 2]^T$. Infine, posto $\alpha = \frac{1}{3}$ si calcoli la fattorizzazione PA=LU e la si utilizzi per calcolare l'inversa di A .
4. Dire per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h \left[\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{3} f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)) \right].$$

Fissato uno di questi valori, applicare il precedente metodo per calcolare le prime due iterate del seguente problema di Cauchy con passo $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = -2xy + 1 & x \in [0, 4] \\ y(0) = 2. \end{cases}$$