

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

6 luglio 2016

1. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si determini i valori del parametro reale a che rendono A singolare, quelli che la rendono definita positiva, e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 1, 0)^T$. Posto $a = 1/2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

2. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la si utilizzi per calcolare il determinante di A , per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 2, 0, 1)^T$, e per determinare la prima colonna di A^{-1} .

3. Costruire il polinomio di secondo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_i & 11 & 5 & 1 & -1 \end{array}$$

risolvendo il sistema lineare sovradeterminato risultante col metodo delle equazioni normali, utilizzando l'algoritmo più appropriato. Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante e perché.

4. Si approssimi la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1$

$$\begin{cases} y' = (1 + y)x, & x \in [0, 3] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

utilizzando il seguente schema con passo $h = \frac{1}{2}$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf \left(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k) \right).$$