Programma del corso di

OTTIMIZZAZIONE

Corso di Laurea magistrale in Matematica

A.A. 2016/2017 - docente: prof. Giuseppe Rodriguez

1. **Introduzione.** Richiami argomenti di base. Problemi ben posti, condizionamento, metodi diretti ed iterativi per sistemi lineari, interpolazione e approssimazione. Aritmetica di macchina, condizionamento delle operazioni elementari, cancellazione. Approssimazione polinomiale nel senso dei minimi quadrati. Interpretazioni alternative del prodotto matriciale: inner and outer product. BLAS. Calcolo della matrice inversa. Prodotti matriciali a blocchi. Il teorema spettrale. Fattorizzazione spettrale. Matrici ortogonali. Approssimazione a rango basso, ϵ-rango. Matrice di adiacenza di un grafo e significato delle sue potenze. Applicazione: analisi di reti complesse, modelli differenziali per la computer vision.

2. **Generalità sui problemi ai minimi quadrati.** Sistemi lineari sovradeterminati e sottodeterminati a rango pieno. Il caso a rango non pieno. Range e nucleo di una matrice. Formulazione di un problema ai minimi quadrati lineare (LSP) sovradterminato e risoluzione con le equazioni normali. Caratterizzazione delle soluzioni. Matrice pseudo-inversa. Fattorizzazioni di Cholesky e QR. Decomposizione ortogonale di uno spazio. LSP duale per sistemi sottodeterminati. Soluzione di minima norma. Equazioni normali del secondo tipo. Interpretazione statistica di un LSP. Proiezioni ortogonali sui sottospazi fondamentali associati ad una matrice. Formulazione generale di un LSP mediante un sistema aumentato.

3. **Calcolo di autovalori e autovettori.** Definizioni base. Matrici simili, diagonalizzabilità, fattorizzazione spettrale. Forma canonica di Schur. Forma canonica di Jordan. Matrici difettive. Matrici normali e unitariamente diagonalizzabili. Teorema di Bauer-Fike. Il metodo delle potenze e delle potenze inverse. Traslazione dello spettro. Matrice compagna e calcolo delle radici di un polinomio. Metodi iterativi e matrici sparse. Applicazione: eigenvector centrality per reti complesse.

4. **Decomposizione ai valori singolari (SVD).** Definizione di valori e vettori singolari. Forma generale della fattorizzazione. Esistenza della SVD. Decomposizione polare di una matrice. Analogie con gli autovalori. Cenni sul calcolo semplificato del sistema singolare. Approssimazioni a rango basso e principal component analysis. I quattro sottospazi fondamentali associati ad una matrice. Definizione generale di numero di condizionamento. Stabilità dei valori singolari. Migliore approssimazione di una matrice. Applicazione alla risoluzione di sistemi e LSP. SVD troncata ed errore di approssimazione. Teoremi di Weyl e di Courant-Fisher. Stabilità dei valori singolari. Rappresentazione della pseudo-inversa e proprietà. Condizioni di Penrose. Applicazione: photometric stereo.

5. **Approssimazione di funzioni.** Migliore approssimazione in uno spazio di Hilbert. Prodotti scalari pesati. Caratterizzazione della soluzione. Equazioni normali. Matrice di Gram. Momenti e coefficienti di Fourier. Polinomio di migliore approssimazione. Formule di quadratura interpolatorie. Funzioni peso e integrali con singolarità. Polinomi ortogonali. Formule di ricorrenza. Proprietà. Formule Gaussiane. Calcolo di pesi e nodi. Polinomi ortogonali classici.

6. **Metodi numerici diretti.** Fattorizzazione di Cholesky, implementazione e uso per la soluzione delle equazioni normali. Fattorizzazione QR e applicazione ad un LSP. Matrici elementari di Householder e di Givens e corrispondenti fattorizzazioni QR. Algoritmo di Gram-Schmidt classico e modificato per la fattorizzazione QR. Algoritmo QR per il calcolo degli autovalori. Cenni sull'algoritmo per il calcolo della SVD.

7. **Metodi numerici iterativi.** Generalità sui metodi iterativi. I metodi del gradiente e del gradiente coniugato. Precondizionamento. Fattorizzazione di Cholesky incompleta. Metodi di proiezione in spazi di Krylov. Algoritmo di Lanczos. Breakdown e riortogonalizzazione. Cenni sui metodi di Arnoldi e di Golub-Kahan.

8. **Laboratorio Matlab.** Implementazione ottimizzata di alcuni degli algoritmi studiati: Cholesky, Householder, Givens, gradiente coniugato, precondizionamento, etc. Sperimentazione numerica sulla performance degli algoritmi.

Testi consigliati

[1] G. Rodriguez. *Algoritmi Numerici.* Pitagora Editrice, Bologna, 2008.

[2] Å. Björck. *Numerical Methods for Least Squares Problems.* SIAM, Philadelphia, 1996.

[3] G.W. Stewart. *Matrix Algorithms. Volume 1: Basic Decompositions.* SIAM, Philadelphia, 1998.

[4] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations.* The John Hopkins University Press, Baltimore, third edition, 1996.

[5] W.L. Briggs and V.E. Henson. *The DFT, An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform.* SIAM, Philadelphia, 1995.

[6] L.N. Trefethen and D. Bau III. *Numerical Linear Algebra.* SIAM, Philadelphia, 1997.

[7] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Matematica Numerica.* Springer, Milano, 2000. Seconda edizione.

[8] V. Comincioli. *Analisi Numerica Metodi Modelli Applicazioni.* McGraw-Hill, Milano, 1995.