

# Titolo dell'articolo

A. U. Thor, **S. Peaker**, and A. N. Other  
Department of Mathematics, University of Anywhere  
Address, Country  
peaker@email.addr

18 marzo 2024

## 1 Risoluzione numerica di equazioni integrali

Un' equazione integrale è un'equazione in cui la soluzione  $f$  è una funzione che compare sotto il segno di integrale. Si parla di equazione integrale lineare di prima specie se essa si presenta solo sotto il segno di integrale

$$\int_D k(x, y)f(x)dx = g(y), \quad y \in D.$$

Si fa riferimento, invece, a una equazione integrale lineare di seconda specie se la soluzione è presente anche fuori l'integrale

$$f(y) + \int_D k(x, y)f(x)dx = g(y), \quad y \in D.$$

In entrambi i casi le funzioni  $k$  e  $g$  sono dette nucleo e termine noto, rispettivamente, e  $D$  rappresenta il dominio della funzione  $f$  (un intervallo finito, illimitato, una curva, ...).

Diversi problemi applicativi, anche il semplice problema di Dirichlet o Neumann per l'equazione di Laplace, si possono riformulare in termini di equazioni integrali. Nelle applicazioni, la soluzione  $f$  è il segnale da ricostruire, la funzione  $g$ , di solito nota solo in un set di punti, rappresenta i dati sperimentali; il nucleo  $k$  invece, di solito nota analiticamente, rappresenta la risposta all'impulso dell'apparecchiatura sperimentale.

La ricerca mira a sviluppare metodi numerici per approssimare la soluzione di equazioni integrali di prima e seconda specie. Tale sviluppo si articola nei seguenti step:

- Sulla base della regolarità delle funzioni coinvolte, si sceglie lo spazio funzionale in cui approssimare la soluzione;
- Si approssima l'operatore integrale mediante una opportuna formula di quadratura o cubatura e si valuta l'equazione risultante in determinati punti. Si ottiene così un sistema di equazioni. La scelta dello schema di quadratura dipende dalle eventuali patologie delle funzioni coinvolte.
- Si studia teoricamente il metodo in termini di stabilità e convergenza, fornendo se possibile anche delle stime teoriche dell'errore;
- Si effettua una vasta sperimentazione numerica al fine di verificare se le stime teoriche sono confermate dalle prove numeriche.

## 2 Il caso discreto

In molti problemi applicativi la funzione da approssimare è nota solo attraverso un certo numero di valori affetti da errore. Si vedano, ad esempio, i dati rappresentati nella Figura 1, ottenuti aggiungendo degli errori Gaussiani ai valori di una funzione seno. In casi di questo tipo non è conveniente

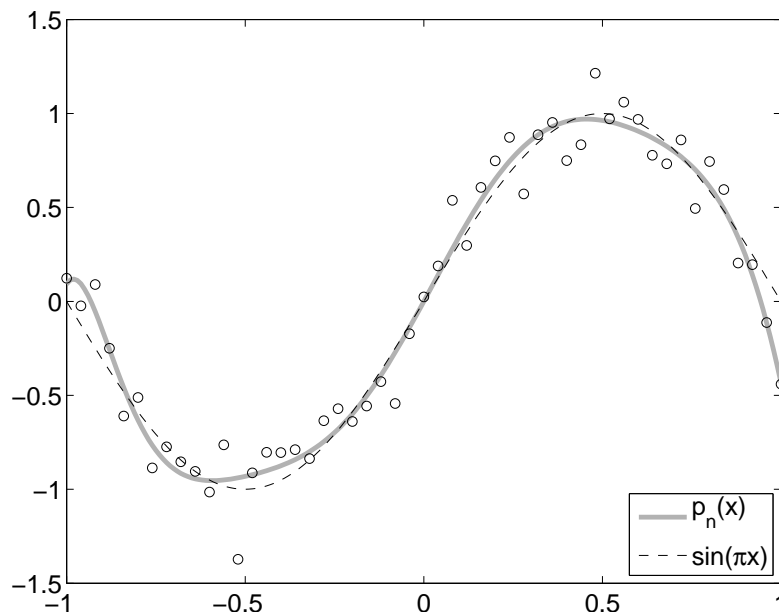


Figura 1: Polinomio di migliore approssimazione ( $n = 10$ )

effettuare un'interpolazione, dal momento che è nota la presenza di forti er-

rori sui dati, e si preferisce effettuare un'approssimazione ai minimi quadrati ricorrendo ad una discretizzazione della norma-2.

Siano  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  le ascisse degli  $m + 1$  punti per i quali sono noti i valori  $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$  della funzione  $f(x)$  ( $y_i = f(x_i)$ ). Fissato un numero naturale  $n \leq m$ , per ogni  $p_n \in \Pi_n$  si consideri la norma

$$\|p_n - f\|_2 = \left( \sum_{i=0}^m [p_n(x_i) - y_i]^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Intendiamo determinare il polinomio  $p_n^*(x)$  di grado  $n$  che risolva il problema di minimo

$$\min_{p_n \in \Pi_n} \|p_n - f\|_2^2 \quad (2)$$

(per semplicità, dal momento che i due problemi sono equivalenti, minimizzeremo il quadrato della norma).

Se  $m = n$  la soluzione coincide col polinomio interpolante, se invece  $m > n$  essa fornisce la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati rispetto alla norma discreta (1).

Utilizzando la base canonica si ottiene

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j x_i^j = (X\mathbf{a})_i, \quad i = 0, \dots, m,$$

dove  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  è il vettore dei coefficienti del polinomio e  $X$  è la matrice di Vandermonde di dimensione  $(m + 1) \times (n + 1)$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza si ha

$$\|p_n - f\|_2^2 = \sum_{i=0}^m [(X\mathbf{a})_i - y_i]^2 = \|X\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2,$$

e il problema (2) risulta essere equivalente alla risoluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare sovradeterminato

$$X\mathbf{a} = \mathbf{y}.$$

La soluzione di tale sistema lineare può essere calcolata la fattorizzazione di Cholesky al sistema normale

$$X^T X \mathbf{a} = X^T \mathbf{y} \quad (3)$$

oppure utilizzando la fattorizzazione QR della matrice  $X$ , procedimento più conveniente dal punto di vista della stabilità numerica.

**Esempio 2.1** *L'algoritmo appena descritto è quello implementato nella funzione polyfit di Matlab. Il grafico della Figura 1 è stato prodotto col codice seguente*

```
N=50;
n=10;
t=linspace(-1,1,N+1)';
b=sin(pi*t)+.2*randn(N+1,1);
x=linspace(-1,1,201)';
f=sin(pi*x);
a=polyfit(t,b,n);
p=polyval(a,x);
plot(x,p,x,f,'--',t,b,'o')
legend('p_n(x)', 'sin(\pix)',4)
```