Esercitazione del 07/12/2012

1) Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

e, utilizzando i calcoli effettuati, calcolare il determinante della matrice dei coefficienti e la sua inversa.

2) Calcolare il numero di condizionamento e le norme 1, 2 e ∞ delle matrici

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione

① Individuiamo la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primo passo: l'elemento pivot è $\boxed{a_{11} = 1}$ ma nella prima colonna compare un elemento che è maggiore in modulo $\rightarrow$ $\boxed{a_{31} = 5}$.
Scambiamo quindi la prima e la terza riga:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I moltiplicatori sono:

$$m_{21} = a_{21} / a_{11} = \frac{4}{5}$$

$$m_{31} = a_{31} / a_{11} = \frac{1}{5}$$

$$m_{41} = a_{41} / a_{11} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\begin{array}{c} \\ 4/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{12}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Secondo passo</u>: l'elemento pivot è $\boxed{a_{22}=0}$ ma nella seconda colonna compare l'elemento $\boxed{a_{42}=1}$ che è maggiore in modulo. Scambiamo quindi la seconda e la quarta riga e calcoliamo i moltiplicatori:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 8/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 12/5 & 4/5 \end{array}\right]$$

$$m_{32} = a_{32}/a_{22} = \frac{0}{1} = 0$$

$$m_{42} = a_{42}/a_{22} = \frac{0}{1} = 0$$

Gli elementi sotto l'elemento pivot sono già nulli quindi non dobbiamo effettuare nessuna operazione.

<u>Terzo passo</u>: l'elemento pivot è $\boxed{a_{33} = -\frac{1}{5}.}$

Dato che l'elemento $a_{43} = \frac{1}{5}$ non lo supera in modulo non c'è motivo di scambiare le righe.

Calcoliamo i moltiplicatori:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ -1 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 8/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 12/5 & 4/5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 8/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$m_{43} = a_{43}/a_{33} = -1$$

Il sistema (equivalente a quello di partenza) ridotto in forma triangolare è quindi:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 = 1 \\ -\frac{1}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 = \frac{6}{5} \\ 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Quindi abbiamo:

$$4x_4 = 2 \rightarrow x_4 = 1/2$$

che sostituito nella terza equazione ci dà

$$-\frac{1}{5}x_3 + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{6}{5} \rightarrow -\frac{1}{5}x_3 = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} \rightarrow x_3 = -2$$

che sostituito nella prima (dalla seconda sappiamo già che $x_2 = 1$) ci dà:

$$5x_1 - 2 + 1 = 4 \rightarrow 5x_1 = 5 \rightarrow x_1 = 1.$$

La soluzione è

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

<u>Verifica</u>: sostituiamo nel sistema di partenza:

$$\begin{cases} 1+1=2 \\ 4-2+2=4 \\ 5-2+1=4 \\ 1=1 \end{cases}$$

Tutte le uguaglianze sono verificate quindi la soluzione è esatta.

Individuiamo le matrici P, L e U.

U è la matrice triangolare superiore che otteniamo all'ultimo passo dell'eliminazione di Gauss. Quindi:

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

La matrice P si ottiene applicando alla matrice identità (4×4) gli scambi effettuati durante l'eliminazione di Gauss nello stesso ordine:

scambio 1-3 $\rightarrow$ scambio 2-4

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=P$$

Per ottenere la matrice L dobbiamo tener conto sia degli scambi che dei moltiplicatori calcolati ad ogni passo:

scambio 1-3

$\downarrow$

moltiplicatori m_{21}, m_{31}, m_{41}

$\downarrow$

scambio 2-4

$\downarrow$

moltiplicatori m_{32}, m_{42}

$\downarrow$

moltiplicatore m_{43}

$$L=\cancel{\begin{bmatrix}1\\4/5\\1/5\\0\end{bmatrix}}\rightarrow L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1/5&0&1&0\\4/5&0&-1&1\end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante di A sfruttiamo la fattorizzazione $PA=LU$. Infatti

$$\det(PA)=\det(LU) \rightarrow \det(P)\cdot\det(A)=\det(L)\det(U)$$

$$\rightarrow \det(A)=\frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)}=\frac{\prod_{i=1}^{n} u_{ii}}{(-1)^{\#scambi}}=(-1)^{\#sc}\prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Nel nostro caso:

$$\prod_{i=1}^{4} u_{ii}=5\cdot 1\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 4=-4$$

$$\#scambi=2 \quad \rightarrow (-1)^2=+1$$

Perciò: $\det(A)=-4$

Il calcolo dell'inversa di A si traduce nella risoluzione di n sistemi lineari

$$Ax=e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \leftarrow \text{posizione } i\text{-esima}$$

Sapendo che $PA=LU \rightarrow PAx=Pe_i \rightarrow$

$$\rightarrow LUx=Pe_i$$

cioè, posto $Ux=y$ abbiamo da risolvere i due sistemi "a cascata"

$$\begin{cases} Ly=Pe_i \\ Ux=y \end{cases} \quad i=1,\dots,n$$

con Pe_i i-esima colonna della matrice P.

$i=1$

Dobbiamo prima risolvere il sistema $Ly = Pe_1$ e poi la soluzione y di questo diventerà il termine noto del sistema $Ux=y$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1/5&0&1&0\\4/5&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{cases}y_1=0\\y_2=0\\1/5y_1+y_3=1 \to y_3=1\\4/5y_1-y_3+y_4=0\end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$y_4=1$$

$$\begin{bmatrix}5&0&1&2\\0&1&0&0\\0&0&-1/5&8/5\\0&0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\to\begin{cases}5x_1+x_3+2x_4=0 & \circledast\\ x_2=0\\ -\frac{1}{5}x_3+\frac{8}{5}x_4=1 & \odot\\ 4x_4=1 \to x_4=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\odot \to -\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}=1 \to -\frac{1}{5}x_3=\frac{3}{5}\to x_3=-3$$

$$\circledast \to 5x_1-3+\frac{1}{2}=0 \to 5x_1=\frac{5}{2}\to x_1=\frac{1}{2}$$

La prima colonna dell'inversa è

$$\begin{bmatrix}1/2\\0\\-3\\1/4\end{bmatrix}$$

$i=2$

$$\begin{cases}y_1=0\\y_2=0\\\frac{1}{5}y_1+y_3=0 \to y_3=0\\\frac{4}{5}y_1-y_3+y_4=1\to y_4=1\end{cases}\to\begin{cases}5x_1+x_3+2x_4=0 & \circledast\\x_2=0\\-\frac{1}{5}x_3+\frac{8}{5}x_4=0\to-\frac{1}{5}x_3=-\frac{2}{5} & \odot\\4x_4=1\to x_4=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$\odot \rightarrow x_3 = 2$

$\circledast \rightarrow 5x_1 + 2 + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 5x_1 = -\frac{5}{2} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$

La seconda colonna dell'inversa è $\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

$i = 3$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ \frac{1}{5}y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5}y_1 - y_3 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \rightarrow 5x_1 - 1 - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow 5x_1 = \frac{5}{2} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ -\frac{4}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 = -\frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5}x_3 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \Rightarrow x_3 = -1 \\ 4x_4 = -1 \rightarrow x_4 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

La terza colonna di A^{-1} è $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ -1/4 \end{bmatrix}$

$i = 4$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ \frac{1}{5}y_1 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = 0 \\ \frac{4}{5}y_1 - y_3 + y_4 = 0 \rightarrow y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ -\frac{1}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \\ 4x_4 = 0 \end{cases}$$

L'inversa di A è quindi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>verifica</u>: moltiplichiamo A per A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto la matrice identità quindi l'inversa è esatta.

2) Il numero di condizionamento di una matrice è dato da

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ in generale

$$K_2(A) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}} & \text{per A generica} \\ \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|} & \text{se A è simmetrica} \end{cases}$$

Le relative norme sono:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,..,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,..,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\rho(A^TA)} & \text{A generica} \\ \rho(A) & \text{A simm.} \end{cases}$$

Per la matrice B abbiamo:

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to 3 \\ \to 4 \end{array} \\
\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 \end{array} &
\end{array}$$

$$\|B\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$$

$$\|B\|_1 = \max\{4, 3\} = 4$$

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(B^T B - \lambda I) = (10-\lambda)(5-\lambda) - 25 = 0$$

$$\to \lambda^2 - 15\lambda + 50 - 25 = 0$$

$$\to \lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 100}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{125}}{2} = \frac{5}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$$

$$\rho(B^T B) = \frac{5}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) \quad \to \|B\|_2 = \sqrt{\frac{5}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)}$$

Per calcolare il n° di condizionamento ci serve l'inversa di B ⑥

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = U \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 3y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5} \\ -5x_2 = -3 \rightarrow x_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 3y_1 + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow x_1 = +\frac{2}{5} \\ -5x_2 = 1 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & +\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \frac{3}{5} \\ \rightarrow \frac{4}{5} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{matrix}$$

$$\|B^{-1}\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} \qquad K_\infty(B) = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\|B^{-1}\|_1 = \max\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} \qquad K_1(B) = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$K_2(B) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(B^TB)}{\lambda_{min}(B^TB)}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$$

Per la matrice C abbiamo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to 3 \\ \to 6 \\ \to 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 2 \end{array}$$

La matrice è simmetrica quindi $\|C\|_1 = \|C\|_\infty$

$$\|C\|_1 = \|C\|_\infty = \max\{3, 6, 2\} = 6$$

$$\|C\|_2 = \rho(C)$$

$$\det(C - \lambda I) = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] - 2\left[2(1-\lambda)\right] = 0$$

$$\to (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 2 - 4\right] = 0$$

$$\to (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = 2 \pm \sqrt{6} \begin{array}{l} \to \sim 4{,}5 \\ \to \sim -0{,}5 \end{array}$$

$$\sigma(C) = \{2-\sqrt{6}, 1, 2+\sqrt{6}\} \qquad \rho(C) = 2+\sqrt{6} = \|C\|_2$$

Calcoliamo l'inversa:

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 0 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}y_1=1\\2y_1+y_2=0 \rightarrow y_2=-2\\-y_2+y_3=0 \rightarrow y_3=-2\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1+2x_2=1 \rightarrow -1\\-x_2+x_3=-2 \rightarrow x_2=1\\2x_3=-2 \rightarrow x_3=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1=0\\2y_1+y_2=1 \rightarrow y_2=1\\-y_2+y_3=0 \rightarrow y_3=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1+2x_2=0 \rightarrow x_1=1\\-x_2+x_3=1 \rightarrow x_2=-\frac{1}{2}\\2x_3=1 \rightarrow x_3=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1=0\\2y_1+y_2=0 \rightarrow y_2=0\\-y_2+y_3=1 \rightarrow y_3=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1+2x_2=0 \rightarrow x_1=-1\\-x_2+x_3=0 \rightarrow x_2=\frac{1}{2}\\2x_3=1 \rightarrow x_3=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Quindi
$$C^{-1}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\1&-\frac{1}{2}&1/2\\-1&1/2&1/2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow 3\\\rightarrow 2\\\rightarrow 2\end{array}\\\begin{array}{ccc}\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&2\end{array}\end{array}$$

$$\|C^{-1}\|_1=\|C^{-1}\|_\infty=\max\{3,2,2\}=3$$

$$K_1(C)=K_\infty(C)=3\cdot 6=18$$

$$K_2(C) = \frac{|\lambda_{max}(C)|}{|\lambda_{min}(C)|} = \frac{|2+\sqrt{6}|}{|2-\sqrt{6}|}$$