ESERCITAZIONE DEL 14/12/2012

① Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ a & 3 & a \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema $Ax=b$.
Posto $a=-1$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel, utilizzando il vettore iniziale
$x^{(0)} = (0,0,0)^T$.

② Assegnato il sistema lineare $Ax=b$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione, per quali valori la matrice A è definita positiva e per quali valori il metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema risulta convergente.
Fissato $a=\frac{1}{2}$, calcolare le prime due iterazioni del metodo, a partire dal vettore iniziale $x^{(0)}=(0,0,0)^T$.

③ Dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(1) = 1 \qquad x \in [1,5] \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione. Calcolare, inoltre, i primi due passi del seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{j+1} = \eta_j + h f\left(x_j + \frac{h}{2}, \eta_j + \frac{h}{2} f(x_j, \eta_j)\right) \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$. Dimostrare infine che la formula utilizzata è del second'ordine.

④ Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = xy'(x) - y^2(x) \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 3 \end{cases}$$

in un sistema del primo ordine, e calcolare i primi due passi $\{\eta_1, \eta_2\}$ del metodo di Eulero utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione

1) una matrice è invertibile se il suo determinante è diverso da zero:

$$\det(A) = 3(9+a) - a(-3) = 27 + 3a + 3a = 6a + 27 \neq 0$$

$$\rightarrow 6a \neq -27 \quad \rightarrow a \neq -\frac{9}{2}$$

la generica forma di un metodo iterativo lineare stazionario del 1° ordine è

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

Nello specifico, per il metodo di Gauss-Seidel:

$$B_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U \qquad e \qquad f_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot b$$

con $D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \\ -a_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Nel nostro caso quindi

$$D-L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'inversa di $(D-L)$ si trova risolvendo i tre sistemi lineari

$$(D-L)x = e_i \quad \text{con } i=1,2,3$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 1 & \rightarrow x_1 = 1/3 \\ ax_1 + 3x_2 = 0 & \rightarrow \frac{a}{3} + 3x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{a}{9} \\ -x_2 + 3x_3 = 0 & \rightarrow \frac{a}{9} + 3x_3 = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{a}{27} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 0 & \rightarrow x_1 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 = 1 & \rightarrow x_2 = 1/3 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 & \rightarrow -\frac{1}{3} + 3x_3 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 = 0 & \rightarrow x_1 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 = 0 & \rightarrow x_2 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 1 & \rightarrow x_3 = 1/3 \end{cases}$$

quindi $(D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -a/9 & 1/3 & 0 \\ -a/27 & 1/9 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$B_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -a/9 & 1/3 & 0 \\ -a/27 & 1/9 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -a/9 & -a/3 \\ 0 & -a/27 & -a/9 \end{bmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo lineare è che il raggio spettrale $\rho(B)$ della matrice di iterazione B sia minore di 1

Calcoliamo quindi gli autovalori di B_{GS}:

$$\det(B_{GS}-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1/3 & 0\\ 0 & \frac{a}{9}-\lambda & -\frac{a}{3}\\ 0 & -\frac{a}{27} & -\frac{a}{9}-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda\left[\left(-\frac{a}{9}-\lambda\right)^2-\frac{a^2}{81}\right]=0$$

$$\rightarrow -\lambda\left(\cancel{\frac{a^2}{81}}+\lambda^2+\frac{2}{9}a\lambda-\cancel{\frac{a^2}{81}}\right)=0 \rightarrow \lambda^2\left(\lambda+\frac{2}{9}a\right)=0$$

$\lambda_{1/2}=0$

$\lambda_3=-\frac{2}{9}a$

$$\sigma(B_{GS})=\left\{0,0,-\frac{2}{9}a\right\}$$

$$\rho(B_{GS})=\left|-\frac{2}{9}a\right|=\frac{2}{9}|a|$$

Il metodo di G-S converge se e solo se $\frac{2}{9}|a|<1$

cioè se $-\frac{9}{2}<a<\frac{9}{2}$

Poniamo $a=-1$:

$$B_{GS}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1/9 & 1/3\\ 0 & 1/27 & 1/9\end{bmatrix} \qquad f_{GS}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 1/9 & 1/3 & 0\\ 1/27 & 1/9 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\13/9\\22/27\end{bmatrix}$$

$$x^{(1)}=B_{GS}\cdot x^{(0)}+f_{GS}=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/9 & 1/3\\ 0 & 1/27 & 1/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/3\\13/9\\22/27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\13/9\\22/27\end{bmatrix}$$

$$x^{(2)}=B_{GS}\cdot x^{(1)}+f_{GS}=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/9 & 1/3\\ 0 & 1/27 & 1/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3\\13/9\\22/27\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/3\\13/9\\22/27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{27}+\frac{1}{3}\\ \frac{13}{81}+\frac{22}{81}+\frac{13}{9}\\ \frac{13}{243}+\frac{22}{243}+\frac{22}{27}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{22}{27}\\ \frac{152}{81}\\ \frac{233}{243}\end{bmatrix}$$

② Il sistema ammette una sola soluzione se il determinante di A è diverso da zero.

$$\det(A) = 2(2-1) - a(2a) = 2 - 2a^2 \neq 0$$

$$\rightarrow a^2 \neq 1 \rightarrow a \neq \pm 1$$

La matrice A è definita positiva se tutti i suoi autovalori sono positivi.

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & a & 0 \\ a & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] - a\,(a(2-\lambda)) = 0$$

$$\rightarrow (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 1 - a^2\right] = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(1-a^2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5+4a^2}}{2}$$

$$\sigma(A) = \left\{2, \frac{3 \pm \sqrt{5+4a^2}}{2}\right\}$$

2 e $\frac{3+\sqrt{5+4a^2}}{2}$ sono positivi. Controlliamo quando lo è $\frac{3-\sqrt{5+4a^2}}{2}$:

$$3 - \sqrt{5+4a^2} > 0 \rightarrow 3 > \sqrt{5+4a^2} \rightarrow 9 > 5 + 4a^2$$

$$\rightarrow 4 > 4a^2 \rightarrow a^2 < 1 \rightarrow -1 < a < 1$$

Per il metodo di Jacobi si ha

$$B_J = D^{-1}(L+U) \qquad \text{e} \qquad f_J = D^{-1} \cdot b.$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$L+U = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ -a & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Per verificare la convergenza dobbiamo imporre che il raggio spettrale di B_J sia minore di 1:

$$\det(B_J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{a}{2} & 0 \\ -a & -\lambda & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left[\lambda^2 - \frac{1}{2}\right] + a\left(\frac{a}{2}\lambda\right) = 0$$

$$\rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} \rightarrow \lambda^2 = \frac{1+a^2}{2} \rightarrow \lambda_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}$$

$$\sigma(B_J) = \left\{0, \pm\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}\right\}$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{\frac{1+a^2}{2}} < 1 \rightarrow \frac{1+a^2}{2} < 1 \rightarrow a^2 < 1 \rightarrow -1 < a < 1$$

Poniamo $a = \frac{1}{2}$:

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad f_J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = B_J \cdot x^{(0)} + f_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = B_J x^{(1)} + f_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} + \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{4} + 7 \\ -\frac{7}{2} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{17}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

3 Per determinare se il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione dobbiamo verificare la Lipschitzianità della $f(x,y)$.
Dato che non sempre è facile fare questa verifica, controlliamo se la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata.

Nel nostro caso $f(x,y) = -2xy^2$ quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy$$

che non è limitata (perché $y \in \mathbb{R}$) ma è continua.

La soluzione esiste ed è unica solo localmente, cioè in un intorno del punto x_0.

Passo 0: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \eta_0 = y_0 = 1 \end{cases}$

Passo 1: $\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \eta_1 = \eta_0 + h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \eta_0 + \frac{h}{2} f(x_0, \eta_0)\right) = \end{cases}$

$$= 1 + \frac{1}{2} f\left(\frac{5}{4}, 1 + \frac{1}{4} f(1,1)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} f\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{11}{16}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(1,1) &= -2\cdot 1\cdot 1 \\ &= -2 \\ f\left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{2}\right) &= -2\cdot\tfrac{5}{4}\cdot \\ &= -\tfrac{5}{8} \end{aligned}}$$

Passo 2: $\begin{cases} x_2 = x_1 + h = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ \eta_2 = \eta_1 + h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, \eta_1 + \frac{h}{2} f(x_1, \eta_1)\right) = \end{cases}$

$$= \frac{11}{16} + \frac{1}{2} f\left(\frac{7}{4}, \frac{11}{16} + \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{16}\right)\right) =$$

$$= \frac{11}{16} + \frac{1}{2} f\left(\frac{7}{4}, -\frac{11}{512}\right) = \frac{11}{16} - \frac{147}{1048576} = \frac{720896 - 147}{1048576} = \frac{720749}{1048576}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{11}{16}\right) &= -2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{121}{256} = \\ &= -\tfrac{726}{256} = -\tfrac{363}{128} \\ f\left(\tfrac{7}{4}, -\tfrac{11}{512}\right) &= -2\cdot\tfrac{7}{4}\cdot\tfrac{121}{262144} \\ &= -\tfrac{147}{524288} \end{aligned}}$$

La formula è monostep ed esplicita ed è quindi della forma

$$\eta_{j+1} = \eta_j + h\,\phi(x_j, \eta_j)$$

Nel nostro caso $\phi(x,y) = f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2} f(x,y)\right)$

Dato che la formula è monostep il metodo è stabile.
Controlliamo che sia consistente:

$$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \phi(x,y)$$ ERRORE LOCALE DI DISCRETIZZAZIONE

Sviluppiamo in serie di taylor:

$$\Delta(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right)\cdot h + O(h^2)$$

$$\phi(x,y) = f(x,y) + f_x(x,y)\frac{1}{2} + f_y(x,y)\cdot\frac{1}{2} f(x,y)\cdot h + O(h^2)$$

Quindi:

$$\tau(x,h) = O(h^2)$$

La formula è del secondo ordine perché si annulla il termine costante e il termine di 1° grado.

4) Per trasformare un problema del 2° ordine in un sistema del primo ordine la sostituzione da effettuare è

$$y = y_1 \qquad y' = y_2$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = x y_2 - y_1^2 \\ y_1(1) = 2 \ , y_2(1) = 3 \end{cases}$$

Il sistema è della forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(x_0) = a \ , y_2(x_0) = b \end{cases}$$

con

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x, y_1, y_2) = y_2 \\ f_2(x, y_1, y_2) = x y_2 - y_1^2 \\ x_0 = 1 \\ a = 2 \ , b = 3 \end{array}}$$

metodo di Eulero "semplice" : $\eta_{i+1} = \eta_i + h f(x_i, \eta_i)$

Per i sistemi

$$\begin{cases} \eta_{1,i+1} = \eta_{1,i} + h f_1(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{2,i+1} = \eta_{2,i} + h f_2(x_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \\ \eta_{1,0} = a \ , \ \eta_{2,0} = b \end{cases}$$

Abbiamo, cioè, un'approssimazione per la funzione y_1 e una per la funzione y_2.

Passo 0:
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \eta_{1,0} = 2 \;,\; \eta_{2,0} = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_1(1,2,3) &= 3 \\ f_2(1,2,3) &= 1\cdot 3 - 4 = \\ &= -1 \end{aligned}}$$

Passo 1:
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \eta_{1,1} = \eta_{1,0} + h\, f_1(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) = 2 + \frac{1}{2} f_1(1,2,3) = \frac{7}{2} \\ \eta_{2,1} = \eta_{2,0} + h\, f_2(x_0, \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) = 3 + \frac{1}{2} f_2(1,2,3) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Passo 2:
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ \eta_{1,2} = \eta_{1,1} + h\, f_1(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} f_1\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{19}{4} \\ \eta_{2,2} = \eta_{2,1} + h\, f_2(x_1, \eta_{1,1}, \eta_{2,1}) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} f_2\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_1\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{2}, \tfrac{5}{2}\right) &= \frac{5}{2} \\ f_2\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{2}, \tfrac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - \frac{49}{4} = -\frac{17}{2} \end{aligned}}$$