ESERCITAZIONE DEL 19/12/2012

① Considerati i seguenti metodi alle differenze finite, dipendenti dai parametri reali α e β, dire per quali valori dei parametri le formule risultano convergenti e per quali assumono ordine 2:

ⓐ $$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2}\left[5f(x_i,\eta_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{\beta}{2}h, \eta_i + \frac{\beta}{2}hf(x_i,\eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

ⓑ $$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{\alpha-1}\left[f(x_i,\eta_i) + f\left(x_i + \frac{3\beta}{2}h, \eta_i + \frac{3\beta}{2}hf(x_i,\eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

ⓒ $$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + (\alpha+1)h\left[f(x_i,\eta_i) + f\left(x_i + \frac{2\alpha}{\beta}h, \eta_i + \frac{2\alpha}{\beta}hf(x_i,\eta_i)\right)\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

② Considerati i seguenti metodi alle differenze finite multistep

ⓐ $\eta_{k+2} = \frac{3}{2}\eta_{k+1} - \frac{1}{2}\eta_k + 2hf(x_k,\eta_k)$

ⓑ $\eta_{j+2} = 6\eta_{j+1} - 2\eta_j + 2hf(x_j,\eta_j)$

Stabilire se sono stabili e il loro ordine di consistenza.

SOLUZIONE

(1) I metodi sono tutti monostep espliciti quindi sono stabili. Dobbiamo soltanto controllare quando sono consistenti.

(a) Individuiamo la funzione $\phi(x,y)$:

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}\left[5f(x,y)+\alpha f\left(x+\frac{\beta}{\alpha}h,\, y+\frac{\beta}{\alpha}h\, f(x,y)\right)\right]$$

e sviluppiamola in serie di Taylor (rispetto ad h):

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}\left\{5f(x,y)+\alpha f(x,y)+\alpha\left[f_x(x,y)\cdot\frac{\beta}{\alpha}+f_y(x,y)\cdot\frac{\beta}{\alpha}f(x,y)\right]\cdot h\right\}+$$

$$+O(h^2)=$$

$$=\frac{\alpha+5}{2}f(x,y)+\frac{\beta}{2}\left[f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right]\cdot h+O(h^2)$$

$$\tau(x,h)=\Delta(x,y)-\phi(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{2}\left[f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right]h$$

$$+O(h^2)-\frac{\alpha+5}{2}f(x,y)-\frac{\beta}{2}\left[f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right]h$$

$$+O(h^2)=$$

$$=\left(1-\frac{\alpha+5}{2}\right)f(x,y)+\frac{1-\beta}{2}\left[f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right]h+O(h^2)$$

Il metodo è convergente se si annulla il termine costante

$\left(1-\frac{\alpha+5}{2}\right)f(x,y)$ cioè se $1-\frac{\alpha+5}{2}=0 \to \alpha=-3$

Il metodo è del 2° ordine se, oltre ad essere convergente, si annulla il termine di 1° grado:

$$\frac{1-\beta}{2}=0 \to \beta=1$$

Quindi il metodo è convergente se $\alpha=-3$ ed è del 2° ordine se $\alpha=-3$ e $\beta=1$.

(b)

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\alpha-1}\left[f(x,y)+f\left(x+\frac{3\beta}{\alpha}h,\, y+\frac{3\beta}{\alpha}h f(x,y)\right)\right]$$

Il cui sviluppo è:

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\alpha-1}\left\{f(x,y)+f(x,y)+\left(f_x(x,y)\cdot\frac{3\beta}{\alpha}+f_y(x,y)\cdot\frac{3\beta}{\alpha}f(x,y)\right)\cdot h+ + o(h^2)\right\}=$$

$$=\frac{2}{\alpha-1}f(x,y)+\frac{3\beta}{\alpha(\alpha-1)}\left(f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)\right)\cdot h+o(h^2)$$

Il metodo è convergente se si annulla il termine costante quindi se

$$\frac{2}{\alpha-1}=1 \to \alpha=3$$

ed è del 2° ordine se si annulla <u>anche</u> il termine di 1° grado, cioè se $\alpha=3$ <u>e</u>

$$\frac{3\beta}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{1}{2} \to 6\beta=6 \to \beta=1$$

ⓒ $\phi(x,y) = (a+1)\left[f(x,y) + f\left(x+\frac{2a}{\beta}h, y+\frac{2a}{\beta}hf(x,y)\right)\right]$

Il suo sviluppo è

$$\phi(x,y) = (a+1)\left\{f(x,y) + f(x,y) + \left[f_x(x,y)\cdot\frac{2a}{\beta} + f_y(x,y)\cdot\frac{2a}{\beta}f(x,y)\right]\cdot h + \right.$$

$$\left. + O(h^2) \right\} =$$

$$= 2(a+1)f(x,y) + \frac{2a(a+1)}{\beta}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot f(x,y)\right)\cdot h + O(h^2)$$

Il metodo è convergente se $2(a+1) = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$
ed è del secondo ordine se (posto $a = -\frac{1}{2}$)

$$\frac{2a(a+1)}{\beta} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \beta = -1$$

② ⓐ Portando le η_k da una parte abbiamo

$$\eta_{k+2} - \frac{3}{2}\eta_{k+1} + \frac{1}{2}\eta_k = h\, 2 f(x_k, \eta_k)$$

l'indice "più arretrato" è η_k quindi non c'è bisogno di rinominare gli indici. Si ha:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = 1 \qquad b_0 = 2, \quad b_1 = b_2 = 0$$

Per verificare la stabilità dobbiamo risolvere l'equazione

$$w^2 - \frac{3}{2}w + \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad w_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Il metodo è stabile perché solo una delle due radici ha modulo 1.

Per stabilire l'ordine di consistenza dobbiamo sviluppare in serie di Taylor l'errore di discretizzazione:

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j y(x+jh) - \sum_{j=0}^{r} b_j y'(x+jh)$$

Nel nostro caso

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}y(x) - \frac{3}{2}y(x+h) + y(x+2h)\right] - 2y'(x) \cong$$

$$\cong \frac{1}{h}\left\{\cancel{\frac{1}{2}y(x)} - \cancel{\frac{3}{2}y(x)} + \cancel{y(x)} + \left[-\frac{3}{2}y'(x) + y'(x)\cdot 2\right]\cdot h + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}y''(x) + y''(x)\cdot 4\right]h^2 + O(h^3)\right\} - 2y'(x) =$$

$$= \frac{1}{2}y'(x) + \frac{5}{4}y''(x)\cdot h + O(h^2) - 2y'(x) =$$

$$= -\frac{3}{2}y'(x) + \frac{5}{4}y''(x)\cdot h + O(h^2)$$

La formula non è consistente quindi non è convergente.

6) $\eta_{j+2} - 6\eta_{j+1} + 2\eta_j = h\, 2f(x_j, \eta_j)$

$a_0 = 2,\ a_1 = -6,\ a_2 = 1$ $\qquad$ $b_0 = 2,\ b_1 = b_2 = 0$

$p(\omega) = \omega^2 - 6\omega + 2 = 0 \quad \to \quad \omega_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-8}}{2} = 3 \pm \sqrt{7}$

Il metodo non è stabile perché $3+\sqrt{7} > 1$

L'ordine di consistenza si stabilisce sviluppando in serie di Taylor l'errore locale di discretizzazione

$$\tau(x,h) = \frac{1}{h}\left[2y(x) - 6y(x+h) + y(x+2h)\right] - 2y'(x) \cong$$

$$\cong \frac{1}{h}\Big\{2y(x) - 6y(x) + y(x) + (-6y'(x) + y'(x)\cdot 2)h +$$

$$+\frac{1}{2}(-6y''(x) + y''(x)\cdot 4)h^2 + O(h^3)\Big\} - 2y'(x) =$$

$$= \frac{1}{h}\Big\{-3y(x) - 4y'(x)\cdot h - y''(x)h^2 + O(h^3)\Big\} - 2y'(x)$$

$$= \frac{1}{h}(-3y(x)) - 6y'(x) - y''(x)h + O(h^2)$$

Il metodo non è consistente.