ESERCITAZIONE DEL 04/01/2013

Il testo è la prova d'esame del 25/01/2012.

Soluzione

① Una matrice è ortogonale se $A^TA = AA^T = I$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 & 2ac+bc \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ac+bc & 0 & 4c^2+c^2 \end{bmatrix}$$

Le condizioni da verificare sono quindi:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \rightarrow \frac{b^2}{4}+b^2=1 \rightarrow \frac{5}{4}b^2=1 \rightarrow b=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 4c^2+c^2=1 \rightarrow 5c^2=1 \rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2ac+bc=0 \rightarrow c(2a+b)=0 \rightarrow 2a=-b \rightarrow a=-\frac{b}{2} \end{cases}$$

$$a = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Le terne di valori che rendono la matrice ortogonale sono:

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ b=\frac{2}{\sqrt{5}} \\ c=\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ b=-2/\sqrt{5} \\ c=-1/\sqrt{5} \end{cases}$$

Scegliamo la prima terna:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \end{matrix} \qquad \|A\|_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \quad 1 \quad \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Dato che la matrice è ortogonale $A^{-1} = A^T$.
La matrice inoltre è simmetrica quindi $A^T = A$.

Questo vuol dire che $\|A^{-1}\|_1 = \frac{3}{\sqrt{5}} = \|A^{-1}\|_\infty$.

Quindi $K_1(A) = K_\infty(A) = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9}{5}$.

$K_2(A) = 1$ perché la matrice è ortogonale.

2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$ scambiamo 1ª e 2ª riga perché $6 > 3$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$ $m_{21} = \frac{1}{2}$, $m_{31} = 0$, $m_{41} = 0$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$ scambiamo 2ª e 3ª riga perché $9 > \frac{3}{2}$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{bmatrix} \qquad m_{32} = -\frac{1}{6}, \quad m_{42} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

scambiamo 3^a e 4^a riga perché $12 > 1/2$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{bmatrix} \qquad m_{34} = \frac{1}{24}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = U$$

P si ottiene applicando gli scambi applicati durante l'algoritmo di Gauss alla matrice identità (nello stesso ordine):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ \cancel{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cancel{1/2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{\prod_{i=1}^{4} u_{ii}}{(-1)^{\#scambi}} = \frac{6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}{(-1)^3} = \frac{-81}{-1} = 81$$

③ $\det(A) = 3(12-a^2) - a(3a) = 36 - 3a^2 - 3a^2 =$

$= -6a^2 + 36 \neq 0 \rightarrow a^2 \neq 6 \rightarrow a \neq \pm\sqrt{6}$

Nel caso del metodo di Jacobi $B_J = D^{-1}(L+U)$ e $f_J = D^{-1} \cdot b$.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$L+U = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_J = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{3} & 0 \\ -\frac{a}{4} & 0 & -\frac{a}{4} \\ 0 & -\frac{a}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo se il metodo converge, cioè se $\rho(B_J) < 1$.

$$\det(B_J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{a}{3} & 0 \\ -\frac{a}{4} & -\lambda & -\frac{a}{4} \\ 0 & -\frac{a}{3} & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{a^2}{12}\right) + \frac{a}{4}\left(\frac{a}{3}\lambda\right) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{12}\right) =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{a^2}{6}\right) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}$$

$\rho(B_J) = \frac{|a|}{\sqrt{6}}$ quindi il metodo converge se

$$\frac{|a|}{\sqrt{6}} < 1 \rightarrow -\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$$

Poniamo $a=1 \rightarrow B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

$$f_J = D^{-1}\cdot b = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 3/2 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = B_J x^{(0)} + f_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 3/2 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/2 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = B_J x^{(1)} + f_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/2 \\ -2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 3/2 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 11/6 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

4 Ponendo $y = y_1$ e $y' = y_2$ si ha il sistema:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2y_2 - 2y_1 \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow f_1(x, y_1, y_2) = y_2$

$\rightarrow f_2(x, y_1, y_2) = 2y_2 - 2y_1$

Passo 0:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \eta_0^{(1)} = 1 \\ \eta_0^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Passo 1:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1/2 \\ \eta_1^{(1)} = \eta_0^{(1)} + h f_1(x_0, \eta_0^{(1)}, \eta_0^{(2)}) \rightarrow \\ \eta_1^{(2)} = \eta_0^{(2)} + h f_2(x_0, \eta_0^{(1)}, \eta_0^{(2)}) \rightarrow \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1(0,1,0) = 0 \\ f_2(0,1,0) = -2 \end{array}}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{2} f_1(0,1,0) = 1 = \eta_1^{(1)}$$

$$\rightarrow 0 + \frac{1}{2} f_2(0,1,0) = -1 = \eta_1^{(2)}$$

Passo 2:

$$x_2 = x_1 + h = 1$$

$$\eta_2^{(1)} = \eta_1^{(1)} + h f_1(x_1, \eta_1^{(1)}, \eta_1^{(2)}) = 1 + \frac{1}{2} f_1\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\eta_2^{(2)} = \eta_1^{(2)} + h f_2(x_1, \eta_1^{(1)}, \eta_1^{(2)}) = -1 + \frac{1}{2} f_2\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) = -1 - 2 = -3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) = -1 \\ f_2\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) = 2(-1) - 2(1) = -4 \end{array}}$$

5 $$\phi(x,y) = \frac{1}{7}\left(2 f(x,y) + f\left(x + \frac{\beta}{2}h, y + \frac{\beta}{2} h f(x,y)\right)\right)$$

$$\Delta(x,y) = \simeq f(x,y) + \frac{1}{2}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot f(x,y)\right) \cdot h + O(h^2)$$

Lo sviluppo della funzione $\phi(x,y)$ è:

$$\phi(x,y) \simeq \frac{1}{7}\left\{ 2 f(x,y) + f(x,y) + h\left[0 + f_x(x,y) \cdot \frac{\beta}{2} + f_y(x,y) \cdot \frac{\beta}{2} f(x,y)\right] + O(h^2) \right\}$$

$\tau(x,h) = \Delta(x,y) - \phi(x,y) =$

$$\left(1 - \frac{\alpha+1}{7}\right) f(x,y) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{72}\right)(f_x + f_y \cdot f) \cdot h + O(h^2)$$

Il metodo converge se

$$1 - \frac{\alpha+1}{7} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 6$$

ed è del second'ordine se

$$\frac{1}{2} - \frac{\beta}{72} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{\beta}{76} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = 21$$

Portiamo le η da una parte:

$$\eta_{k+1} - 4\eta_k + 3\eta_{k-1} = h\left[-2 f(x_k, \eta_k)\right]$$

L'indice più arretrato non è η_k ma η_{k-1} quindi aggiungiamo 1 a tutti gli indici:

$$\eta_{k+2} - 4\eta_{k+1} + 3\eta_k = h\left[-2 f(x_{k+1}, \eta_{k+1})\right]$$

I coefficienti sono:

$a_2 = 1$

$a_1 = -4$

$a_0 = 3$

$$\rho(w) = w^2 - 4w + 3 = 0$$

$$w_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \rightarrow 3, \ 1$$

Il metodo non è stabile perché una delle radici è > 1.