Esercitazione 1 (25 Ottobre 2013)

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Tutor: Caterina Fenu

1. Ortonormalizzare i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

determinare lo spettro e il raggio spettrale.

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \beta \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori del parametro β la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi

4. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dimostrare che i vettori sono ortogonali. Dire se la matrice $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ è non singolare e calcolare il suo spettro. Sfruttando i calcoli fatti e motivando la risposta, calcolare il determinante e lo spettro dell'aggiunta di A. Infine, calcolare $\|\mathbf{v}_i\|_1$, $\|\mathbf{v}_i\|_2$, $\|\mathbf{v}_i\|_\infty$, $i = 1, 2, 3$.

Soluzione:

1. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt consiste nel trovare i vettori ortonormali $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$ a partire dai vettori $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ tramite la formula

$$\widetilde{\mathbf{q}_k} = \mathbf{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{r}_{jk}\mathbf{q}_j \qquad \mathbf{q}_k = \frac{\widetilde{\mathbf{q}_k}}{r_{kk}}$$

dove $\mathbf{r}_{jk} =< \mathbf{q}_j, \mathbf{w}_k >$ e $r_{kk} = \|\widetilde{\mathbf{q}_k}\|$.

- Primo passo $\longrightarrow k = 1$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
r_{11} &= \|\widetilde{\mathbf{q}}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \\
\mathbf{q}_1 &= \frac{\widetilde{\mathbf{q}}_1}{r_{11}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

- Secondo passo $\longrightarrow k = 2$.

$$\widetilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{w}_2 - \sum_{j=1}^{1} \mathbf{r}_{j2}\mathbf{q}_j = \mathbf{w}_2 - \mathbf{r}_{12}\mathbf{q}_1$$

dove

$$\mathbf{r}_{12} =< \mathbf{q}_1, \mathbf{w}_2 >=< \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} >= \frac{2}{\sqrt{3}} + 0 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Quindi

$$\widetilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 4/3 \\ 1/3 - 0 \\ -2 + 4/3 \\ 0 - 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
r_{22} = \|\widetilde{\mathbf{q}}_2\| &= \sqrt{(2/3)^2 + (1/3)^2 + (-2/3)^2 + (-4/3)^3} \\
&= \sqrt{4/9 + 1/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{25/9} = 5/3,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\widetilde{\mathbf{q}}_2}{r_{22}} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}.$$

- Terzo passo $\longrightarrow k = 3$.

$$\widetilde{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{w}_3 - \sum_{j=1}^{2} \mathbf{r}_{j3}\mathbf{q}_j = \mathbf{w}_3 - \mathbf{r}_{13}\mathbf{q}_1 - \mathbf{r}_{23}\mathbf{q}_2$$

dove

$$\mathbf{r}_{13} =< \mathbf{q}_1, \mathbf{w}_3 >=< \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} >= -1/\sqrt{3} + 0 + 0 + 2/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3},$$

$$\mathbf{r}_{23} =< \mathbf{q}_2, \mathbf{w}_3 >=< \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} >= -2/5 + 1/5 + 0 - 8/5 = -9/5.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{q}}_3 &= \mathbf{w}_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_1 + \frac{9}{5}\mathbf{q}_2 \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} + \frac{9}{5} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 1/3 + 18/25 \\ 1 + 0 + 9/25 \\ 0 + 1/3 - 18/25 \\ 2 - 1/3 - 36/25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46/75 \\ 34/25 \\ -29/75 \\ 17/75 \end{bmatrix} \\
r_{33} &= \|\widetilde{\mathbf{q}}_3\| = \frac{1}{75}\sqrt{(46)^2 + (102)^2 + (29)^2 + (17)^2} = \frac{\sqrt{13650}}{75} = \frac{\sqrt{546}}{15} \\
\mathbf{q}_3 &= \frac{\widetilde{\mathbf{q}}_3}{r_{33}} = \frac{15}{\sqrt{546}} \begin{bmatrix} -46/75 \\ 34/25 \\ -29/75 \\ 17/75 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{546}} \begin{bmatrix} -46/5 \\ 102/5 \\ -29/5 \\ 17/5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- Quarto passo $\longrightarrow k = 4$.

$$\widetilde{\mathbf{q}}_4 = \mathbf{w}_4 - \sum_{j=1}^{3} \mathbf{r}_{j4}\mathbf{q}_j = \mathbf{w}_4 - \mathbf{r}_{14}\mathbf{q}_1 - \mathbf{r}_{24}\mathbf{q}_2 - \mathbf{r}_{34}\mathbf{q}_3$$

dove

$$\mathbf{r}_{14} =< \mathbf{q}_1, \mathbf{w}_4 > =< \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} >= 0 + 0 - 1/\sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = -2/\sqrt{3},$$

$$\mathbf{r}_{24} =< \mathbf{q}_2, \mathbf{w}_4 > =< \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} >= 0 + 2/5 - 2/5 + 4/5 = 4/5,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{34} =< \mathbf{q}_3, \mathbf{w}_4 > &= \frac{1}{\sqrt{546}} < \begin{bmatrix} -46/5 \\ 102/5 \\ -29/5 \\ 17/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} > \\ &= \frac{1}{\sqrt{546}}(0 + 204/5 - 29/5 - 17/5) = \frac{158}{5\sqrt{546}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{q}}_4 &= \mathbf{w}_4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{q}_1 - \frac{4}{5}\mathbf{q}_2 - \frac{158}{5\sqrt{546}}\mathbf{q}_3 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} - \frac{158}{5\sqrt{546}} \frac{1}{\sqrt{546}} \begin{bmatrix} -46/5 \\ 102/5 \\ -29/5 \\ 17/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 + 2/3 - 8/25 + 7268/13650 \\ 2 + 0 - 4/25 - 16116/13650 \\ 1 - 2/3 + 8/25 + 4582/13650 \\ -1 + 2/3 + 16/25 - 2686/13650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80/91 \\ 60/91 \\ 90/91 \\ 10/91 \end{bmatrix} \\ r_{44} &= \|\widetilde{\mathbf{q}}_4\| = \frac{10}{91}\sqrt{(8)^2 + (6)^2 + (9)^2 + (1)^2} = \frac{10\sqrt{182}}{91} \\ \mathbf{q}_4 &= \frac{\widetilde{\mathbf{q}}_4}{r_{44}} = \frac{91}{10\sqrt{182}} \begin{bmatrix} 80/91 \\ 60/91 \\ 90/91 \\ 10/91 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

$$< \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

che é la condizione di ortonormalitá.

2. Lo spettro di una matrice quadrata A si indica con $\sigma(A)$ ed è definito come l'insieme dei suoi autovalori. Per trovare gli autovalori di una matrice si devono trovare le radici del polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Se la matrice ha dimensione n allora gli autovalori saranno n (contati con le rispettive molteplicità) e sono, in generale, complessi.

Nel nostro caso

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -7 & 5 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Sviluppando il determinate rispetto alla prima colonna otteniamo

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 0) - 1(7\lambda - 5) = 3\lambda^2 - \lambda^3 - 7\lambda + 5 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0.$$

Per trovare le radici di questo polinomio di terzo grado, utilizziamo la regola di Ruffini. Si vede facilmente che 1 é una radice del polinomio (infatti ponendo $\lambda = 1$ si ha $-1 + 3 - 7 + 5 = 0$) e quindi il polinomio é divisibile per il polinomio $(\lambda - 1)$. Per trovare il divisore utilizziamo il classico schema

	-1	3	-7	5
1		-1	2	-5
	-1	2	-5	0

Lo zero nell'ultima casella indica che la decomposizione è giusta e i valori che lo precedono nell'ultima riga sono i coefficienti del polinomio di secondo grado che divide il polinomio $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5$. Quindi si ha

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda - 5) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto, questo é nullo se si annullano i suoi fattori, cioé se

$$\lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \quad \text{oppure}$$
$$-\lambda^2 + 2\lambda - 5 = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \pm 2i.$$

Lo spettro di A é quindi $\sigma(A) = \{1, 1-2i, 1+2i\}$.

Il **raggio spettrale** di una matrice A é per definzione

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

dove λ_i sono gli autovalori della matrice. Nel nostro caso

$$|1| = 1$$
$$|1-2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} = |1+2i|,$$

(due numeri complessi coniugati hanno lo stesso modulo).

Dato che $\sqrt{5} > 1$ il raggio spettrale di A é $\rho(A) = \sqrt{5}$.

3. Una matrice é invertibile (o non singolare) se il suo determinante é diverso da zero. Nel nostro caso

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \beta & 2 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & \beta \end{bmatrix} = \beta(\beta^2 - 1).$$

Questo determinante é diverso da zero quando

$$\beta \neq 0 \quad \text{oppure}$$
$$\beta^2 - 1 \neq 0 \longrightarrow \beta \neq \pm 1$$
$$.$$

Quindi la matrice é invertibile $\forall \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, +1, -1\}$.

Calcoliamo gli autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \beta - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & \beta - \lambda & 0 \\ 1 & 2 & \beta - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\beta - \lambda)((\beta - \lambda)^2 - 1) = (\beta - \lambda)(\beta^2 + \lambda^2 - 2\beta\lambda - 1) = 0$$

Gli autovalori si trovano quindi imponendo che

$$\beta - \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \beta$$
$$\beta^2 + \lambda^2 - 2\beta\lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \beta \pm 1.$$

Lo spettro di A dipendente dal paramentro β é $\sigma(A) = \{\beta, \beta+1, \beta-1\}$. Questi autovalori sono tutti positivi se contemporaneamente

$$\beta > 0$$
$$\beta + 1 > 0 \longrightarrow \beta > -1$$
$$\beta - 1 > 0 \longrightarrow \beta > 1,$$

cioé se $\beta > 1$.

4. Due vottori sono ortogonali se il loro prodotto scalare é nullo. Dato che i vettori sono tre e il prodotto scalare é simmetrico, dobbiamo controllare che

$$
\begin{aligned}
< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > &= 0 \\
< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 > &= 0 \\
< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 > &= 0.
\end{aligned}
$$

Questo si verifica facilmente, infatti

$$
\begin{aligned}
< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > &= 0 + 0 + 0 = 0 \\
< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 > &= 0 - 6 + 6 = 0 \\
< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 > &= 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}
$$

La matrice

$$
A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}
$$

é non singolare se il suo determinante é diverso da zero.

$$
\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot [9 - (-2) \cdot 2] = 13,
$$

Quindi la matrice é non singolare.

Calcoliamo gli autovalori:

$$
\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}
$$

$$
= (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - (-2) \cdot 2] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 13) = 0
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
1 - \lambda = 0 &\longrightarrow \lambda = 1 \\
\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 &\longrightarrow \lambda = 3 \pm 2i
\end{aligned}
$$

cioé lo spettro di A é $\sigma(A) = \{1, 3+2i, 3-2i\}$.

La matrice aggiunta A^* di una matrice A é per definizione la trasposta coniugata di A. In questo caso **la matrice é reale** quindi la sua coniugata coincide con se' stessa. Questo significa che l'aggiunta di A coindice con la trasposta

$$A^* = A^T.$$

Dato che gli autovalori e il determinante della trasposta di una matrice coincidono con gli autovalori e il determinante della matrice stessa, si ha:

$$\begin{aligned}\sigma(A^*) = \sigma(A^T) = \sigma(A) = \{1, 3+2i, 3-2i\}\\ \det(A^*) = \det(A^T) = \det(A) = 13.\end{aligned}$$

Per definizione

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} |x_i|.\end{aligned}$$

Quindi, nel nostro caso, per la norma 1:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1\|_1 &= |1| + |0| + |0| = 1\\ \|\mathbf{v}_2\|_1 &= |0| + |3| + |2| = 5\\ \|\mathbf{v}_3\|_1 &= |0| + |-2| + |3| = 0 + 2 + 3 = 5.\end{aligned}$$

Per la norma 2:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1\|_2 &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1\\ \|\mathbf{v}_2\|_2 &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\\ \|\mathbf{v}_3\|_2 &= \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.\end{aligned}$$

Per la norma infinito:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\{|1|, |0|, |0|\} = 1\\ \|\mathbf{v}_2\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\{|0|, |3|, |2|\} = 3\\ \|\mathbf{v}_3\|_\infty &= \max_{1\le i\le n}\{|0|, |-2|, |3|\} = 3.\end{aligned}$$