Esercitazione 8 (11 Dicembre 2017)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica ed Informatica

Tutor: Caterina Fenu

1. Dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione, e calcolare i primi due passi η_1 e η_2 della formula

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{3}\left[f(x_i, \eta_i) + 2f(x_i + \frac{3}{4}h, \eta_i + \frac{3}{4}hf(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0, \end{cases}$$

utilizzando il passo $h = 1$.

2. Dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(1) = 1, \qquad x \in [1, 5]. \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione. Calcolare, inoltre, i primi due passi del seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{j+1} = \eta_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, \eta_j + \frac{h}{2}f(x_j, \eta_j)) \\ \eta_0 = y_0, \end{cases}$$

utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

3. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3}\left[f(x_k, \eta_k) + \frac{1}{2}f\left(x_k + \frac{1}{3}h, \eta_k + \frac{1}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Inoltre, fissato $h = \frac{1}{2}$, si calcolino i primi due passi del metodo al seguente problema di Cauchy, dopo avere dimostrato che ammette una e una sola soluzione

$$\begin{cases} y'(x) = -4xy, \quad x \in [0, 5], \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

4. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4}\left[f(x_k, \eta_k) + 3f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x - y, \quad x \in [0, 3], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

si dica se ammette un'unica soluzione e si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.

5. Dire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{2y}{x-2} \\ y(0) = 1, \quad x \in [0,5] \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione. Calcolare, inoltre, i primi due passi del metodo alle differenze finite di Heun, con passo $h = \frac{1}{2}$.