ESERCITAZIONE 10 del 17/12/2018

① Stabilire, motivando opportunamente la risposta, se il seguente metodo alle differenze finite è monostep, convergente, del 2° ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[6f(x_k,\eta_k) - 5f(x_k+4h,\eta_k+4hf(x_k,\eta_k))\right].$$

Calcolarne inoltre, mediante il precedente metodo, la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1/2$ con passo $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = -3xy & x \in [-5,5] \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

② Considerato il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 - \dfrac{y_2}{x} \\ y_1(2) = 0, \; y_2(2) = 1, \quad x \in [2,5], \end{cases}$$

si approssimi la soluzione in $x = 3$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$.

③ Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2 \\ y(0) = 1, \quad x \in [0,10], \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = 3/2$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = 1/2$.

④ Trasformare il seguente problema del 2° ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y'-1)x - y\,, & x \in \left[\frac{1}{2}, 7\right] \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$ per approssimare la soluzione in $x = 3/2$.

⑤ Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

ⓐ $\eta_{k+1} = \eta_k + 2\alpha h \left[3 f(x_k, \eta_k) + f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k))\right]$

ⓑ $\eta_{k+1} = \frac{2\gamma+1}{2}\eta_k - \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1})$.

Si determinino i valori dei parametri α e $\beta \in \mathbb{R}$ che rendono il metodo ⓐ stabile. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.