



ESERCITAZIONE 12 del 08/01/2019

① Si calcoli la fattorizzazione $PA=LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 12 \\ 18 & 6 & 6 & 12 \\ 6 & 2 & 5 & 11 \\ 9 & 14 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ con $\underline{b} = [12, 6, 9, 0]^T$.

② Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica, motivando opportunamente la risposta, se la matrice dei coefficienti possiede una specifica struttura e per quali valori di α la matrice dei coefficienti è singolare. Si studi la convergenza del metodo di Jacobi al varione di $\alpha \in \mathbb{R}$ e posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\underline{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

③ Si calcoli per quali valori del parametro $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

è ortogonale e fissato uno di questi valori si determini il raggio spettrale. Sia ora $\theta = \pi$, si determini il condizionamento in norma 2 di A e si calcoli nel modo più conveniente possibile la soluzione del sistema $A^2 \underline{x} = \underline{b}$ con $\underline{b} = [1, -2, 0]^T$.

④ Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} m_{i+1} = m_i + \frac{h}{5} [7f(x_i, m_i) - \alpha f(x_i + \alpha h, m_i + \alpha \beta h f(x_i, m_i))] \\ m_0 = y_0 \end{cases}$$

è convergente. Sostituiti i valori di α e β che rendono il metodo del secondo ordine, e passo $h = \frac{1}{2}$, calcolane i valori di m_1 e m_2 per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -xy \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

⑤ Si classifichi il seguente metodo alle differenze finite e se ne studi la stabilità

$$m_{k+1} = -\frac{1}{4}m_k + \frac{1}{8}m_{k-1} + 2h f(x_k, m_k).$$

Si determini, inoltre, se è convergente e, in caso affermativo, il relativo ordine.