ESERCITAZIONE 7 del 26/11/2018

① Date le matrici

$$L=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ \beta & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad M=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & \gamma\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

si trovino i valori del parametro $\gamma\in\mathbb{R}$ che rendono le matrici M e U l'una l'inversa dell'altra e i valori del parametro $\beta\in\mathbb{R}$ che rendono la matrice $A=LM$ una matrice simmetrica.
Assegnato a ciascun parametro il valore trovato, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A, il suo raggio spettrale e il suo indice di condizionamento in norma $1,2,\infty$.

② Assegnate le matrici

$$P=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad Q=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \beta\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

si determinino i valori di α e β che rendono P e Q delle matrici ortogonali e si calcolino i numeri di condizionamento con indice $1,2,\infty$ di entrambe. Infine, si risolva nel modo più opportuno il sistema lineare $Q\underline{x}=\underline{b}$, con $\underline{b}=[1,1,1]^T$.

③ A partire dal vettore $\underline{w} = \frac{1}{2}[1, -1, 1, -1]^T$ si calcoli la matrice $A = I - 2\underline{w}\underline{w}^T$. Si dimostri che A è l'inversa di se stessa e si calcolino gli indici di condizionamento in indice $1, 2, \infty$.

④ Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$, si calcolino gli indici di condizionamento con in norma 1 e ∞.

⑤ Si utilizzi l'algoritmo di Gauss per risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 + 17x_3 + 23x_4 = -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + 19x_3 + 13x_4 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$