ESERCITAZIONE 9 del 10/12/2018

① Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 = -1 \\ \alpha x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\underline{x}^{(0)} = [1,1,0]^T$.

② Si consideri il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\underline{x}^{(0)} = [1,0,0]^T$.

③ Si consideri il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dopo aver determinato i valori del parametro α che rendono la matrice definita positiva, si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\underline{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

(4) Si consideri il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\underline{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.
È possibile dire qual è la soluzione del sistema senza fare ulteriori calcoli?