SOLUZIONE

① Si useranno le seguenti formule

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos\beta \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Quindi:

- $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \cancel{\sin(\alpha)\sin(\beta)} + \cos(\alpha)\cos(\beta) + \cancel{\sin(\alpha)\sin(\beta)}$

$$\rightarrow \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\rightarrow \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

- $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \sin(\alpha)\sin(\beta) + - \cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$\rightarrow \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\rightarrow \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

- $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cancel{\cos(\alpha)\sin(\beta)} + \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cancel{\cos(\alpha)\sin(\beta)}$

$$\rightarrow \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\rightarrow \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

Utilizzando le formule appena ricavate si può seguire facilmente la dimostrazione a pag 156 (teorema 6.1) del libro di testo.

② A e B sono l'una l'inversa dell'altra se

$AB = BA = I$.

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{\beta}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}+\frac{\alpha}{5} & 0 & -\frac{2}{5}+\frac{2\alpha}{5} \\ 0 & -\frac{2\beta}{5} & 0 \\ -\frac{2\alpha}{5}+\frac{2}{5} & 0 & \frac{\alpha}{5}+\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B = I \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{5}+\frac{\alpha}{5} & 0 & -\frac{2}{5}+\frac{2\alpha}{5} \\ 0 & -\frac{2\beta}{5} & 0 \\ -\frac{2\alpha}{5}+\frac{2}{5} & 0 & \frac{\alpha}{5}+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{cioè} \begin{cases} \frac{4+\alpha}{5} = 1 & \rightarrow \alpha = 1 \\ -\frac{2\beta}{5} = 1 & \rightarrow \beta = -\frac{5}{2} \\ \frac{-2\alpha+2}{5} = 0 & \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

I valori che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra sono $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{5}{2}$.

C è ortogonale se $CC^T = C^TC = I$.

$$CC^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ Quindi C è ortogonale.

③ lo spettro di una matrice è l'insieme dei suoi autovalori che si calcolano risolvendo l'equazione polinomiale

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-6-\lambda & -4 & -2\\ -2 & -6-\lambda & -4\\ -2 & -4 & -6-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=(-6-\lambda)\left[(-6-\lambda)^2-16\right]+4\left[-2(-6-\lambda)-8\right]-2\left[8+2(-6-\lambda)\right]$$

$$=(-6-\lambda)\left[(-6-\lambda+4)(-6-\lambda-4)\right]-8\left[(-6-\lambda)+4\right]-4\left[4+(-6-\lambda)\right]=$$

$$=(-6-\lambda+4)\left[(-6-\lambda)(-6-\lambda-4)-8-4\right]=$$

$$=(-2-\lambda)\left[(-6-\lambda)(-10-\lambda)-12\right]=(-2-\lambda)\left[\lambda^2+16\lambda+48\right]$$

$$=0$$

$$-2-\lambda=0 \rightarrow \lambda_1=-2$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{-16\pm\sqrt{256-192}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-16\pm 8}{2}= \begin{matrix}\nearrow -12\\ \searrow -4\end{matrix}$$

lo spettro di A è $\sigma(A)=\{-12,-4,-2\}$.

Il raggio spettrale è il massimo dei moduli degli autovalori, cioè

$$\rho(A)=\max\{|-12|,|-4|,|-2|\}=\max\{12,4,2\}=12$$

④ la matrice B è non singolare se $\det(B)\neq 0$.

$$\det(B)=\det\begin{bmatrix}\beta & \alpha & 0\\ \alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}=\beta(\beta-\alpha^2)\neq 0$$

$$\beta\neq 0 \quad e \quad \beta-\alpha^2\neq 0 \rightarrow \beta\neq\alpha^2 \rightarrow \alpha\neq\pm\sqrt{\beta}$$

B è ortogonale se $BB^T=B^TB=I$

$$B^TB=\begin{bmatrix}\beta & \alpha & 0\\ \alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta & \alpha & 0\\ \alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta^2+\alpha^2 & \beta\alpha+\alpha & 0\\ \alpha\beta+\alpha & \alpha^2+1 & 0\\ 0 & 0 & \beta^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\beta^2+\alpha^2=1 \xrightarrow{se\ \alpha=0} \beta^2=1 \rightarrow \beta=\pm 1\\ \alpha^2+1=1 \rightarrow \alpha=0\\ \beta^2=1 \rightarrow \beta=\pm 1\\ \beta\alpha+\alpha=0 \xrightarrow{\alpha=0} \beta \text{ qualsiasi}\end{cases}$$

le condizioni sono verificate tutte <u>contemporaneamente</u> dai valori $\alpha=0$ e $\beta=\pm 1$.