

Esercitazione 10 di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

5 Dicembre 2019

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 3 \\ ax_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases},$$

dove a è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro la matrice dei coefficienti del sistema è non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema converge. Posto $a = \frac{1}{2}$, si calcoli la prima iterata del metodo di Gauss-Seidel, a partire da un vettore $\mathbf{x}^{(0)}$ non nullo. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $a = \frac{1}{2}$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

2. La seguente equazione nonlineare

$$3x^2 - e^x = 0$$

ammette due radici positive, la prima contenuta nell'intervallo $[1/2, 1]$, la seconda nell'intervallo $[3, 4]$. Si calcolino le prime due iterazioni del metodo di bisezione per approssimare la prima radice. Si applichi, inoltre, il metodo di Newton per approssimare la radice contenuta nel secondo intervallo calcolando solo la prima iterazione, prima con punto iniziale $x^{(0)} = 3$ e poi con punto iniziale $x^{(0)} = 4$. Alla luce dei risultati ottenuti, quale approssimazione iniziale $x^{(0)}$ è migliore? Motivare opportunamente la risposta.

3. Scrivere, sia nella forma di Lagrange che utilizzando la rappresentazione canonica, il polinomio interpolante la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+1},$$

nei punti di ascissa $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Si calcoli l'errore di relativo che si commette nell'approssimare la funzione con tale polinomio nel punto $x = \frac{3}{4}$.