Esercitazione 11 di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

8 Gennaio 2020

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \beta x_1 + x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 = 8 \\ x_1 + \beta x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 4 \\ x_2 + \beta x_3 = 2 \end{cases},$$

dove β è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali la matrice dei coefficienti risulta definita positiva. Studiare la convergenza del metodo di Jacobi e, posto $\beta = -2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss–Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso $\beta = -3$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

Soluzione. Il sistema ammette una sola soluzione per $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ e la matrice dei coefficienti risulta definita positiva per $\beta \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.
Il metodo di Jacobi converge per $|\beta| > \sqrt{2}$.
$\mathbf{x}^{(1)} = [-\frac{7}{2}, -\frac{15}{4}, -\frac{23}{8}]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [\frac{-188-23\sqrt{2}}{32}, \frac{-316-23(\sqrt{2}+2)}{64}, \frac{-444-23(\sqrt{2}+2)}{128}]^T$.
Se $\beta = -3$ il metodo di Gauss-Seidel converge in quanto la matrice dei coefficienti risulta strettamente diagonalmente dominante.

2. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contiene la radice positiva dell'equazione

$$f(x) = x^2 - \left(\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) x - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.$$

Calcolare le prime due iterate del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterate del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Si calcolino gli errori relativi che si commettono utilizzando il metodo di bisezione e di Newton, rispettivamente.

Soluzione. Le radici sono $-\frac{1}{2}$ e $\sqrt{5} \simeq 2.2361$, quindi l'intervallo che contiene la radice positiva è $[2, 3]$.
$c_3 = \tilde{x} = \frac{17}{8} \simeq 2.13, x_2 \simeq 2.24$.
$\mathrm{err}_{\mathrm{bis}} \simeq 0.05, \mathrm{err}_{\mathrm{Newton}} \simeq 0.002$

3. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per risolvere i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $A\mathbf{z} = \mathbf{c}$, dove $\mathbf{b} = [-6, 12, -\frac{15}{4}, \frac{25}{4}]^T$ e $\mathbf{c} = [-\frac{23}{4}, 5, -1, 3]^T$. Infine, si determini la terza colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

Soluzione. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

$\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T$, $\mathbf{z} = [0, 1, 0, 1]^T$, $A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{2}]^T$, $\det(A) = -16$.

4. Si consideri la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dipendente dal paramentro reale α. Si determinino i valori del parametro α che rendono B ortogonale. Assegnato al parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle due matrici in norma 1, 2 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 2, 1]^T$.

Soluzione. B risulta ortogonale per $\alpha = \pm 2$. Assegnato il valore $\alpha = 2$, si ha $\mathbf{x} = B^T\mathbf{b} = [1, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \sqrt{3} - \frac{1}{2}]^T$.
$k_1(B) = k_\infty(B) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$, $k_2(B) = 1$.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	15	5	3	9	47

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

Soluzione. $p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$.
$p_4(-2) = 57$.