Esercitazione 12 di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

30 gennaio 2020

1. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{2}i \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i & 4 \end{bmatrix}$$

   a) indicarne spettro e il raggio spettrale sapendo che $\lambda_1 = 3$;

   b) calcolare il suo determinante;

   Soluzione.

   a) Sapendo che $\lambda_1 = 3$, tramite il metodo di Ruffini applicato al polinomio caratteristico di A, si trova che $\lambda_2 = 4 - 2i$ e $\lambda_3 = 4 + 2i$ e quindi il raggio spettrale di A è $\rho(A) = 2\sqrt{5}$;

   b) $\det(A) = 60$.

2. Data l'equazione non lineare
$$(x - \sqrt{3})^2 = 0$$

   a) indicare l'intervallo $[k, k+1]$ in cui è contenuta la radice;

   b) indicare l'approssimazione che si ottiene eseguendo due passi dell'algoritmo di Newton partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato al punto a);

   c) indicare l'approssimazione che si ottiene eseguendo due passi utilizzando il metodo delle corde partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato al punto a) e utilizzando il valore $m = f'(k+1)$;

   d) qual è l'ordine di convergenza del metodo di Newton?

   Soluzione.

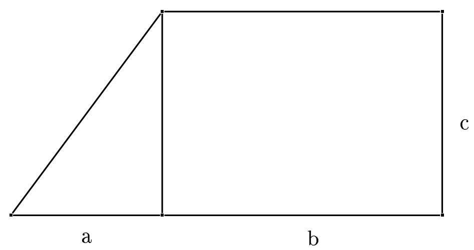
   a) L'intervallo in cui è contenuta la radice è $[1, 2]$;

   b) l' approssimazione ottenuta eseguendo due passi del metodo di Newton è $x_2 = 1.799$;

   c) l'approssimazione che si ottiene eseguendo due passi utilizzando il metodo delle corde partendo dall'estremo destro dell'intervallo $[1, 2]$ e utilizzando il valore $m = f'(2) = 0.5359$ è $x_2 = 1.8325$;

   d) l'ordine di convergenza del metodo di Newton è $p = 1$.

3. Data la seguente figura



calcolarne l'area, essendo

$$a = 0.62354 \cdot 10^1, \quad b = 0.000394 \cdot 10^4 \quad \text{e} \quad c = 3129.740 \cdot 10^{-3},$$

nei due sistemi in virgola mobile $\mathbb{F}(10, t, -10, 10)$ con $t = 3$ e $t = 4$.
Calcolare gli errori relativi nei due casi.

Soluzione.

Per $t = 3$: $fl(\text{AREA}) = 0.221 \cdot 10^2$ (errore relativo $\rho \simeq 5.086 \cdot 10^{-4}$).

Per $t = 4$: $fl(\text{AREA}) = 0.2209 \cdot 10^2$ (errore relativo $\rho \simeq 5.587 \cdot 10^{-5}$).

4. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 5 \\ \frac{4}{3} & -6 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{4} & \frac{55}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{4}{3} & \frac{9}{2} & \frac{16}{3} & \frac{49}{6} \end{bmatrix}$$

   a) determinare le matrici L e U che la fattorizzano tramite l'algoritmo di Gauss senza pivoting;

   b) tramite le matrici determinate al punto a), calcolare la quarta colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

Soluzione.

Le matrici L e U della fattorizzazione ottenuta tramite l'algoritmo di Gauss senza pivoting sono

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 & 5 \\ 0 & -7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = -224, \quad A^{-1}\mathbf{e}_4 = [-5/28, -5/28, 0, 1/4]^T.$$

5. Assegnata la matrice dipendente dal parametro reale β

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -\beta & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   a) determinare i valori di β che rendono il metodo di Gauss-Seidel convergente;

   b) assegnato il valore $\beta = 3$:

      b1) indicare l'approssimazione della soluzione che si ottiene facendo due iterate del metodo di Jacobi partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 1]^T$ con $\mathbf{b} = [13, 1, 1, -2]^T$;

      b2) risolto il sistema utilizzando il metodo diretto computazionalmente più conveniente, calcolare l'errore relativo, rispetto alla norma infinito, che si commette utilizzando il metodo iterativo di Jacobi e motivare la scelta fatta.

Soluzione.

Il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per ogni valore di β. Le approssimazioni della soluzione del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = [3, 1/3, 1, 1]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = [17/9, 1, 1, 1]^T.$$

La soluzuione del sistema, ottenua per sostituzione all'indietro (essendo il sistema triangolare superiore), è $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T$. L'errore relativo è $err_{\text{inf}} = 8/9$.