Esercitazione 13 di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

13 febbraio 2020

1. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} \gamma & -2 & -6 \\ -2 & \gamma-3 & 3 \\ -6 & 3 & \gamma+1 \end{bmatrix}$$

   a) trovare i valori del parametro reale α che rendono A ortogonale;

   b) trovare i valori del parametro reale γ che rendono C l'inversa di B;

   c) assegnati ad α e γ i valori trovati:

      c1) calcolare l'inversa di AB;

      c2) calcolare i numeri di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di A;

      c3) calcolare i numeri di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di B.

   Soluzione.

   a) A è ortogonale per $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$;

   b) C è l'inversa di B per $\gamma = 8$;

   c) assegnati ad α e γ i valori trovati:

      c1) $(AB)^{-1} = CA^T = \begin{bmatrix} 3 - 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{3} & 5\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} & -\frac{7}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2} & -\frac{21}{4}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$

      c2) $k_1(A) = k_\infty(A) = \frac{(\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{8}$ e $k_2(A) = 1$;

      c3) $k_1(B) = 9 = k_\infty(B)$, $k_2(B) = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

2. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
y_i	27	2	$\frac{27}{32}$	1	0	-49

   Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -3$.

   Soluzione.

$$p_5(x) = -x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{e} \quad p_5(-3) = 196.$$

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contiene la radice positiva dell'equazione

$$f(x) = \cos(3x) + x^2 - 2x - 3 = 0.$$

   Calcolare le prime due iterate del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterate del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Qual è l'ordine di convergenza dei metodi utilizzati?

   Soluzione.

La radice positiva dell'equazione data, è contenuta nell'intervallo $[3, 4]$. Le iterate del metodo di bisezione sono:

$$c_1 = 3.5, \quad c_2 = 3.25 \quad c_3 = 3.125.$$

Le iterate ottenute applicando il metodo di Newton partendo da $x_0 = 4$ sono

$$x_1 = 3.2321, \quad x_2 = 3.2285.$$

L'ordine di convergenza del metodo di bisezione è $p = 1$ mentre quello di Newton è $p = 2$ essendo la radice semplice.

4. Assegnata la matrice dipendente dal parametro reale β

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 1/2 & 0 \\ 1/2 & \beta & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \beta \end{bmatrix}$$

   a) determinare i valori di β tali che:
      a1) B sia invertibile;
      a2) B sia definita positiva;
      a3) il metodo di Jacobi applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulti convergente;
   b) assegnati $\beta = 2$, $\mathbf{b} = [8, 3, 4]^T$ e $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soluzione.

   a1) B è invertibile per $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$;
   a2) B è definita positiva per $\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   a3) il metodo di Jacobi applicato al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente per $\beta < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   b) le prime due iterate del metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sono

$$\mathbf{x}^{(0)} = [4, 3/2, 2]^T, \quad \mathbf{x}^{(0)} = [29/8, 0, 13/8]^T.$$

5. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   a) determinare le matrici P, L e U che la fattorizzano tramite l'algoritmo di Gauss con pivoting;
   b) tramite le matrici determinate al punto a):
      b1) risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [11, 5, 7]^T$;
      b2) calcolare l'inversa di A e il suo determinante.

Soluzione.

$$P = I_{3\times3}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [3, 2, 1]^T, \quad \det(A) = 12, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/2 \\ -1/6 & 5/12 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$