

## Esercitazione 7 di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

21 novembre 2019

1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

stabilire per quali valori del parametro reale  $\gamma$  la matrice è invertibile e per quali risulta definita positiva. Considerato il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$ , si studi al variare del parametro  $\gamma$  la convergenza del metodo di Jacobi e si calcoli la prima iterata partendo dal vettore  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$ . Senza svolgere nessun calcolo e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso  $\gamma = 5$  il metodo di Gauss-Seidel converge.

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix},$$

stabilire per quali valori del parametro reale  $\alpha$  il metodo di Gauss-Seidel, applicato al sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , risulta convergente. Fissato un tale valore, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando termine noto e vettore iniziale

$$\mathbf{b} = [2, 3, 4]^T, \quad \mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 8x_1 + 2\beta x_3 = -2 \\ \beta x_2 = -1 \\ \beta x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases},$$

dove  $\beta$  è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Jacobi converge. Posto  $\beta = 2$ , si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ . Risolto il sistema utilizzando il metodo di Gauss, si calcoli l'errore relativo, rispetto alla norma infinito, che si commette utilizzando il metodo iterativo anzichè quello diretto.