Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

21 novembre 2014

Compito numero 1

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca se Q è ortogonale e si determini il parametro α che rende S la matrice inversa di R. Si calcoli la matrice $A = QR$. Si dica se A è invertibile, si calcolino i suoi autovalori (sapendo che uno di essi è pari a 1) e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, l'inversa di A .

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$

$$-2y'' + 5y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 5(1 + \frac{x}{4}), & -4 \leq x < 0, \\ 5(1 - \frac{x}{4}), & 0 \leq x < 4, \\ f(x + 8), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{2ix}}{x^2 - 2x + 6}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(2k - 4)}{\mathrm{e}^{3ik}(k - 2)}\right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-2y'' + 5y = \mathrm{e}^{2x} H(-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

21 novembre 2014

Compito numero 2

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca se Q è ortogonale e si determini il parametro β che rende S la matrice inversa di R. Si calcoli la matrice $B = QR$. Si dica se B è invertibile, si calcolino i suoi autovalori (sapendo che uno di essi è pari a 1) e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, l'inversa di B .

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-5, 5]$

$$-5y'' + 2y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 6(1 + \frac{x}{5}), & -5 \le x < 0, \\ 6(1 - \frac{x}{5}), & 0 \le x < 5, \\ f(x + 10), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{3ix}}{x^2 - 6x + 12}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(2k + 6)}{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k}(k + 3)}\right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-5y'' + 2y = \mathrm{e}^{5x} H(-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$