Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

15 gennaio 2015

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = QR.$$

   Si dimostri che Q è ortogonale e si calcoli il suo numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞. Si dica, motivando la risposta, se R è invertibile e se è definita positiva. Si risolva, nel modo più conveniente, il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

   e si calcoli la terza colonna dell'inversa di A.

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y^2 + x, \quad x \in [\frac{1}{2}, 5] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione sui primi due punti della discretizzazione risultante.

   Esercizio 5 sul retro del foglio

5. Dire per quale coppia di valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è contemporaneamente stabile, convergente e del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha + 2}{\beta - 1} h \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{1}{2}h, \eta_k + \frac{1}{2}hf(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = (1+\gamma)\eta_k + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{3}{4} \right) \eta_{k-1} + h \left[(1+\gamma^2) f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1) f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

15 gennaio 2015

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = QR.$$

   Si dimostri che Q è ortogonale e si calcoli il suo numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞. Si dica, motivando la risposta, se R è invertibile e se è definita positiva. Si risolva, nel modo più conveniente, il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ +2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

   e si calcoli la terza colonna dell'inversa di A.

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & 3 & 0 \\ \beta & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro β la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Gauss Seidel al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y + x^2, \quad x \in [\frac{1}{2}, 5] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione sui primi due punti della discretizzazione risultante.

   Esercizio 5 sul retro del foglio

5. Dire per quale coppia di valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è contemporaneamente stabile, convergente e del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha+1}{\beta-1} h \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{1}{2}h, \eta_k + \frac{1}{2} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\delta \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = (2-\delta)\eta_k - (\delta-3)\eta_{k-1} + h\left[(1+\delta^2+\delta) f(x_k, \eta_k) + (\delta-1) f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$