Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

2 febbraio 2015

1. Si calcoli la fattorizzatione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 12 & -6 \\ 2 & -3 & 14 & -7 \\ 4 & -3 & 10 & -9 \\ 8 & -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$
e la si utilizzi per calcolare la terza colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 2 & \gamma & \gamma \\ \gamma & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 1]^T$.

3. Si consideri il seguente schema alle differenze finite dove α, β sono due parametri reali positivi
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{2}{\alpha - 1} h \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{\beta^2}{2} h, \eta_k + \frac{\beta^2}{2} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$
Si dica per quali valori di α e β il metodo è stabile, per quali è convergente del primo ordine e per quali è convergente del secondo ordine. Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile
$$\eta_{k+1} = (1 + \gamma)\eta_k + h\left[(1 + \gamma^2) f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1) f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$
$$-y'' + \sqrt{\pi} y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \le x < -2, \\ 2, & -2 \le x < 2, \\ 4 - x, & 2 \le x < 4, \\ f(x + 8), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

5. Eseguire i seguenti calcoli
$$\mathcal{F}\left\{ \frac{e^{-2ix}}{x^2 + 6x + 12} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{i(k-3)}{16 + (k-3)^2} \right\}.$$