Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

9 giugno 2015

1. Si calcolino, al variare del parametro reale β, le norme con indice 1 e ∞ della matrice
$$U = \begin{bmatrix} \beta\sqrt{3} & 0 & \beta \\ \beta & 0 & -\beta\sqrt{3} \\ 0 & -2\beta & 0 \end{bmatrix}.$$
Si determinino quindi i valori del parametro β che rendono ortogonale la matrice e, dopo aver fissato uno di essi, si calcoli il condizionamento della matrice in norma 1, 2, e ∞, e si risolva il sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$.

2. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}. \tag{1}$$
Si dica per quali valori di α la matrice è invertibile e per quali è definita positiva. Si stabilisca, inoltre, per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$ risulta essere convergente. Infine, fissato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi usando il vettore iniziale $[1, 0, 1]^T$

3. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite
$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{5}\left[7f(x_i, \eta_i) - \alpha f(x_i + \alpha\beta h, \eta_i + \alpha\beta h f(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$
è convergente. Sostituiti i valori di α e β che rendono il metodo del second'ordine, e posto $h = \frac{1}{2}$, calcolare i valori di η_1 e η_2 per il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -xy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:
$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{-3ix}}{5 - 2ix}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\left(e^{-(x+2)^2}\right) * \left(\frac{1}{4}e^{-4|x|}\right)\right\}$$