

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

16 luglio 2015

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la prima colonna della sua inversa.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e, posto $\alpha = 1/2$, si calcolino le prime due iterate a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 2, 3]^T$. Infine, si studi al variare del parametro α la norma di A con indice 1 e ∞ .

3. Dire se il seguente metodo alle differenze finite, dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, è convergente

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{5} \left[2f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \frac{h}{\beta}, \eta_i + \frac{h}{\beta}f(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e per quale valore del parametro risulta del second'ordine. Sostituiti il valore di β che rende il metodo del second'ordine, e posto $h = \frac{1}{2}$, calcolare i valori di η_1 e η_2 per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. Risolvere ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$y'' + y' + y = x^2 + 1.$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-2ix}}{x^2 + 6x + 12} \right\}, \quad (e^{-7x}H(x)) * (e^{7x}H(-x)).$$